



แผนการจัดการเรียนรู้ รายวิชาคณิตศาสตร์เข้ม ค33202  
ภาคเรียนที่ 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6  
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์  
ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551  
ปรับปรุง 2560

โดย  
นายวิเชียร กิรติศักดิ์กุล  
ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะครูชำนาญการพิเศษ

- ประกอบด้วย
- หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ลิมิตและความต่อเนื่อง
  - หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน
  - หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 การอินทิเกรต

โรงเรียนเมืองราดวิทยาคม อำเภอห่มเกล้า จังหวัดเพชรบูรณ์  
สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เพชรบูรณ์  
สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน  
กระทรวงศึกษาธิการ

## คำนำ

แผนการจัดการเรียนรู้เล่มนี้ จัดทำขึ้นเพื่อใช้ประกอบการจัดการเรียนการสอนรายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ภาคเรียนที่ 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ปรับปรุง 2560) และใช้เป็นแนวทางแก่ครูผู้สอน ในการจัดทำแผนการจัดการเรียนรู้ของกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นแผนการจัดการเรียนรู้ที่เน้นนักเรียนเป็นสำคัญ เน้นการเรียนการสอนแบบร่วมมือ มีการวัดประเมินผลที่หลากหลายตามสภาพจริง มีทั้งหมด จำนวน 13 แผน จำนวน 3 หน่วยการเรียนรู้ ดังนี้

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ลิขิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1–2)

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน (แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3–9)

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 การอินทิเกรต (แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10–13)

อนึ่งผู้เขียนหวังว่าแผนการจัดการเรียนรู้เล่มนี้ คงจะมีประโยชน์ต่อครูผู้สอนรายวิชา คณิตศาสตร์หรือรายวิชาอื่นๆ บ้างไม่มากนักน้อย ในการใช้เป็นแนวทางในการดำเนินการจัด กิจกรรมการเรียนการสอน ขอขอบคุณทุกท่านที่ให้คำปรึกษา แนะนำและให้การสนับสนุน

วิเชียร กิรติศักดิ์กุล

## สารบัญ

	หน้า
การวิเคราะห์หลักสูตร .....	1
หน่วยการเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ และจุดประสงค์การเรียนรู้ .....	2
การเตรียมการสอน .....	5
แผนหลัก .....	6
การดำเนินการวัดผล .....	14
รายละเอียดของแผนการจัดการเรียนรู้ .....	15
การดำเนินการจัดการเรียนรู้ .....	16
ปฐมนิเทศก่อนเรียน .....	17
หน่วยการเรียนรู้ที่ 1  ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน .....	19
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1  ลิมิตของฟังก์ชัน .....	19
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2  ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน .....	34
หน่วยการเรียนรู้ที่ 2  อนุพันธ์ของฟังก์ชัน .....	50
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3  อัตราการเปลี่ยนแปลง .....	50
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4  อนุพันธ์ของฟังก์ชัน .....	59
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5  ความชันของเส้นโค้ง .....	67
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6  การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร .....	81
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7  อนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิท .....	105
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8  อนุพันธ์อันดับสูง .....	115
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9  การประยุกต์ของอนุพันธ์ .....	128
หน่วยการเรียนรู้ที่ 3  การอินทิเกรต .....	152
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10  กระบวนการตรงข้างกับการหาอนุพันธ์ .....	153
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11  อินทิกรัลไม่จำกัดเขต .....	162
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 12  อินทิกรัลจำกัดเขต .....	183
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 13  พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง .....	193

## สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
บรรณานุกรม .....	204
ภาคผนวก .....	205
ภาคผนวก ก ตัวอย่างแบบประเมินผลนักเรียนด้านความรู้ความสามารถ คุณลักษณะที่พึงประสงค์ และทักษะกระบวนการทำงาน .....	208
ภาคผนวก ข ตัวอย่างแบบบันทึกข้อมูลนักเรียน .....	211

บันทึกการนิเทศแผนการจัดการเรียนรู้

ความคิดเห็นของหัวหน้ากลุ่มสาระ

.....  
.....  
.....  
.....

ลงชื่อ.....

( นายปิยะชัย อาสาสอน )

หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ความคิดเห็นของหัวหน้ากลุ่มบริหารงานวิชาการ

.....  
.....  
.....  
.....

ลงชื่อ.....

( นางรัชฌุ บัวพันธ์ )

หัวหน้ากลุ่มบริหารงานวิชาการ

ความคิดเห็นของรองผู้อำนวยการ

.....  
.....  
.....  
.....  
.....

ลงชื่อ.....

( นายไพโรจน์ เดชะรัตนางกูร )

รองผู้อำนวยการโรงเรียนเมืองราดวิทยาคม

...../...../.....

ความคิดเห็นของผู้บริหาร

.....  
.....  
.....  
.....  
.....

ลงชื่อ.....

( นายไพโรจน์ ทองเพ็ญ )

ผู้อำนวยการโรงเรียนเมืองราดวิทยาคม

...../...../.....

**การวิเคราะห์หลักสูตรคณิตศาสตร์ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์  
(ม. 4 – ม. 6)**

หลักสูตรรายวิชาวิชาคณิตศาสตร์ ระดับชั้น ม.6 2 ชั่วโมง / สัปดาห์ 1.0 หน่วยการเรียนรู้

**คำอธิบายรายวิชา**

เพื่อพัฒนาศักยภาพของผู้เรียนให้มีความรู้ความเข้าใจและสามารถนำความรู้ที่ได้นั้นไปประยุกต์ได้ในเนื้อหาเกี่ยวกับ

**แคลคูลัสเบื้องต้น** ลิมิตของฟังก์ชัน ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน อนุพันธ์ฟังก์ชัน ความชันของเส้นโค้ง การหาอนุพันธ์ฟังก์ชันพีชคณิตโดยใช้สูตร อนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิต อนุพันธ์อันดับสูง อินทิกรัลไม่จำกัดเขต อินทิกรัลจำกัดเขต พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

โดยจัดประสบการณ์หรือสร้างสถานการณ์ที่ใกล้ตัวให้ผู้เรียนได้ศึกษาค้นคว้าปฏิบัติจริง ทดลอง สรุป รายงาน เพื่อพัฒนาทักษะ/กระบวนการในการคิดคำนวณ การแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และนำประสบการณ์ด้านความรู้ ความคิด ทักษะ กระบวนการที่ได้ไปใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และใช้ในชีวิตประจำวันอย่างสร้างสรรค์ รวมทั้งเห็นคุณค่าและเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ สามารถทำงานอย่างเป็นระบบ ระเบียบ รอบคอบ มีความรับผิดชอบ มีวิจารณญาณและเชื่อมั่นในตนเอง

การวัดผลและประเมินผลใช้วิธีการที่หลากหลาย ตามสภาพความเป็นจริงของเนื้อหาและทักษะ/กระบวนการที่ต้องการวัด

**ผลการเรียนรู้**

1. ตรวจสอบความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่กำหนดให้
2. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตที่กำหนดให้และนำไปใช้แก้ปัญหา
3. หาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตและจำกัดเขตของฟังก์ชันพีชคณิตที่กำหนดให้และนำไปใช้แก้ปัญหา

## หน่วยการเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ และจุดประสงค์การเรียนรู้

รายวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 1 ประกอบด้วยหน่วยการเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ และจุดประสงค์การเรียนรู้ดังตารางต่อไปนี้

หน่วยการเรียนรู้ที่	ชื่อหน่วยการเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	จุดประสงค์การเรียนรู้
1	ขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	1.1 ขีดจำกัดของฟังก์ชัน	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. บอกความหมายของขีดจำกัดของฟังก์ชันได้</li> <li>2. บอกทฤษฎีเกี่ยวกับขีดจำกัดและนำไปใช้ได้</li> <li>3. หาขีดจำกัดของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้</li> </ol>
		1.2 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. บอกความหมายของความต่อเนื่องของฟังก์ชันได้</li> <li>2. บอกได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด ๆ หนึ่งได้</li> <li>3. บอกได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง <math>(a, b)</math> และ <math>[a, b]</math> ได้</li> </ol>
2	อนุพันธ์ของฟังก์ชัน	2.1 อัตราการเปลี่ยนแปลง	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. หาความเร็วในระยะเวลาใด ๆ เมื่อกำหนดสมการการเคลื่อนที่มาให้ได้</li> <li>2. บอกนิยามอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยและอัตราการเปลี่ยนแปลงขณะใด ๆ ของฟังก์ชันได้</li> <li>3. หาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยขณะใด ๆ ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้</li> </ol>
		2.2 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้นิยาม	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. บอกความหมายของอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้</li> <li>2. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้โดยใช้นิยามได้</li> </ol>
		2.3 ความชันของเส้นโค้ง	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. บอกความหมายของเส้นสัมผัสเส้นโค้งได้</li> <li>2. บอกความหมายของความชันของเส้นโค้งได้</li> <li>3. หาความชันของเส้นโค้งและสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดที่กำหนดให้ได้</li> </ol>

หน่วยการเรียนรู้ที่	ชื่อหน่วยการเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	จุดประสงค์การเรียนรู้
		2.4 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. บอกสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้</li> <li>2. พิสูจน์สูตรบางสูตรของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้</li> <li>3. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้โดยใช้สูตรได้</li> <li>4. นำความรู้เรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตรไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้</li> </ol>
		2.5 อนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิท	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. บอกความหมายของฟังก์ชันคอมโพสิทได้</li> <li>2. บอกกฎลูกโซ่ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิทได้</li> <li>3. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิทได้</li> </ol>
		2.6 อนุพันธ์อันดับสูง	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. บอกความหมายของอนุพันธ์อันดับที่ <math>n</math> ของฟังก์ชัน เมื่อ <math>n \in \mathbb{I}</math> และ <math>n &gt; 1</math> ได้</li> <li>2. หาอนุพันธ์อันดับที่ <math>n</math> ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ เมื่อ <math>n \in \mathbb{I}</math> และ <math>n &gt; 1</math> ได้</li> <li>3. นำความรู้เรื่องอนุพันธ์อันดับสูงไปใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์ได้</li> </ol>
		2.7 การประยุกต์ของอนุพันธ์	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. บอกทฤษฎีบทเกี่ยวกับฟังก์ชันลดและฟังก์ชันเพิ่ม บนช่วงใด ๆ ได้และนำไปใช้ได้</li> <li>2. บอกความหมายหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันได้</li> <li>3. หาค่าวิกฤตและจุดวิกฤตของฟังก์ชันได้</li> <li>4. หาค่าต่ำสุดสัมบูรณ์และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้</li> <li>5. นำความรู้เกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันไปใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์การหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ได้</li> </ol>



หน่วยการเรียนรู้ที่	ชื่อหน่วยการเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	จุดประสงค์การเรียนรู้
3	การอินทิเกรต	3.1 กระบวนการตรงข้ามกับการหาอนุพันธ์	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. บอกความหมายของกระบวนการตรงกันข้ามกับการหาอนุพันธ์ได้</li> <li>2. หาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้</li> </ol>
		3.2 อินทิกรัลไม่จำกัดเขต	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. บอกความหมายของอินทิกรัลไม่จำกัดเขตได้</li> <li>2. บอกสัญลักษณ์ที่ใช้แทนอินทิกรัลไม่จำกัดเขตได้</li> <li>3. บอกสูตรเกี่ยวกับการอินทิเกรตที่นำมาใช้ในการหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันได้</li> <li>4. หาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันได้</li> <li>5. นำความรู้เรื่องอินทิกรัลไม่จำกัดเขตไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้</li> </ol>
		3.3 อินทิกรัลจำกัดเขต	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. บอกสัญลักษณ์อินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชัน <math>f</math> บนช่วง <math>[a, b]</math> ได้</li> <li>2. บอกทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัสได้</li> <li>3. หาอินทิกรัลจำกัดเขต โดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลได้</li> </ol>
		3.4 พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. บอกความหมายของพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งได้</li> <li>2. บอกสัญลักษณ์ที่ใช้แทนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งได้</li> <li>3. หาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้</li> </ol>

## การเตรียมการจัดการเรียนรู้

ผู้สอนได้ดำเนินการเกี่ยวกับการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 1 ดังนี้

1. **ศึกษาวิธีสอน** ในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ผู้สอนได้ดำเนินการดังนี้

- 1.1 สอนโดยยึดผู้เรียนเป็นสำคัญ
- 1.2 ให้นักเรียนศึกษาและค้นพบคำตอบด้วยตนเอง
- 1.3 ฝึกทักษะเป็นรายบุคคลและเป็นกลุ่ม
- 1.4 จัดการเรียนการสอนแบบร่วมมือ

2. **จัดทำสื่อการเรียนรู้** ผู้สอนได้จัดทำสื่อการเรียนรู้ประกอบการเรียนการสอนให้สอดคล้อง กับวิธีการสอนที่ยึดนักเรียนเป็นสำคัญ ดังนี้

- 2.1 เอกสารประกอบการสอน
- 2.2 ใบกิจกรรม
- 2.3 แบบสรุปเนื้อหา
- 2.4 แบบฝึกทักษะ
- 2.5 เอกสารฝึกหัดเพิ่มเติม
- 2.6 โจทย์แข่งขันเกมคณิตศาสตร์

3. **จัดทำเครื่องมือวัดผลและประเมินผล** ผู้สอนได้จัดทำเครื่องมือวัดผลและประเมินผลเพื่อใช้ตรวจสอบว่าการเรียนการสอนนั้นบรรลุวัตถุประสงค์ที่กำหนดไว้หรือไม่ ดังนี้

- 3.1 สร้างแบบทดสอบก่อนเรียน/หลังเรียน รวมตลอดภาคเรียน เป็นข้อสอบอัตนัยจำนวน 5 ข้อ
- 3.2 สร้างแบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ เป็นข้อสอบแบบอัตนัย จำนวน 5 ข้อ

รวม 20 ข้อ

- 3.3 สร้างแบบทดสอบกลางภาค เป็นแบบอัตนัย จำนวน 4 ข้อ

4. **กำหนดแผนหลัก** วิชาคณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ซึ่งประกอบด้วย

- 4.1 แผนการจัดการเรียนรู้ จำนวน 13 แผน
- 4.2 สัปดาห์ที่ จำนวนชั่วโมงสอน ชั่วโมงที่สอน
- 4.3 จุดประสงค์การเรียนรู้
- 4.4 สาระการเรียนรู้ ยึดตามหลักสูตรสถานศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551
- 4.5 สื่อการเรียนรู้ ให้ใช้ตามข้อ 2
- 4.6 การวัดผลและประเมินผล ยึดตามแผนหลักดังนี้

**แผนหลักวิชาคณิตศาสตร์ (ม. 4 – ม. 6)**  
**ภาคเรียนที่ 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6**

ชั่วโมงที่ 1 ปฐมนิเทศก่อนเรียน

ชั่วโมงที่ 2 ทดสอบก่อนเรียน

แผนการจัดการ เรียนรู้ที่	สัปดาห์ ที่	จำนวน ชั่วโมง สอน	ชั่วโมง ที่	จุดประสงค์ การเรียนรู้	สาระการ เรียนรู้	สื่อการเรียนรู้	การวัดผล		
							ราย จุดประ สงค์	กลาง ภาค	ปลาย ภาค
1	2 – 3	1	3	1. บอกความหมาย ของลิมิตของฟังก์ชัน ได้	- ความหมาย ของลิมิตของ ฟังก์ชัน	- ใบบันทึก รหัสที่ 1 - แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 1.1 - แบบสรุปเนื้อ หา	/	/	-
		2	4 – 5	2. บอกทฤษฎี เกี่ยวกับลิมิตและ นำไปใช้ได้	- ทฤษฎีบท เกี่ยวกับลิมิต	- เอกสาร ประกอบการ สอน รหัสที่ 1 - แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 1.2 - แบบสรุปเนื้อ หา รหัสที่ 1	/	/	/
		1	6	3. หาลิมิตของ ฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้	- การหาลิมิต ของฟังก์ชัน	- โจทย์แข่งขัน คณิตศาสตร์ เกี่ยวกับลิมิต	/	/	/
2	4 – 5	2	7 – 8	1. บอกความหมาย ของความต่อเนื่อง ของฟังก์ชันได้ 2. บอกได้ว่าฟังก์ชันที่ กำหนดให้เป็นฟังก์ชัน ต่อเนื่องที่ จุด ๆ หนึ่งได้	- ความ ต่อเนื่อง ของฟังก์ชัน	- เอกสาร ประกอบการ สอน รหัสที่ 2.1 - แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 2.1 - แบบสรุปเนื้อ หา รหัสที่ 2			

แผนการจัดการ เรียนรู้ที่	สัปดาห์ ที่	จำนวน ชั่วโมง สอน	ชั่วโมง ที่	จุดประสงค์ การเรียนรู้	สาระการ เรียนรู้	สื่อการเรียนรู้	การวัดผล		
							ราย จุดประสงค์	กลาง ภาค	ปลาย ภาค
		1	9	3. บอกได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อเนื่องบนช่วง (a, b) และ [a, b] ได้	- ความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนช่วง	- เอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 2.2 - แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 2.2 - แบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 2	/	/	-
3	5 - 6	2	10-11	1. หาความเร็วในขณะเวลาใด ๆ เมื่อกำหนดสมการการเคลื่อนที่มาให้ได้ 2. บอกความหมาย อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย และอัตราการเปลี่ยนแปลงขณะใด ๆ ของฟังก์ชันได้ 3. หาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยขณะใด ๆ ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้	- อัตราการเปลี่ยนแปลง	- เอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 3 - แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 3 - แบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 3 - เอกสารฝึกหัดเพิ่มเติม รหัสที่ 3	/	/	-
4	6 - 7	2	12-13	1. บอกความหมายของอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้ 2. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้โดยใช้ नियมได้	- อนุพันธ์ของฟังก์ชัน	- เอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 4 - แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 4 - แบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 4	/	/	-

แผนการจัดการ เรียนรู้ที่	สัปดาห์ ที่	จำนวน ชั่วโมง สอน	ชั่วโมง ที่	จุดประสงค์ การเรียนรู้	สาระการ เรียนรู้	สื่อการเรียนรู้	การวัดผล		
							ราย จุดประ สงค์	กลาง ภาค	ปลาย ภาค
5	7 - 8	1	14	1. บอกความหมาย ของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ได้ 2. บอกความหมาย ของความชันของเส้น โค้งได้	- ความหมาย ของความชัน เส้นโค้ง	- เอกสารประ กอบการสอน รหัสที่ 5.1 - แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 5.1 - แบบสรุปเนื้อ หา รหัสที่ 5	/	-	-
		2	15-16	3. หาความชันของ เส้นโค้งและสมการ ของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดที่กำหนดให้ได้	- การหาความ ชันของเส้นโค้ง และสมการ เส้นสัมผัสเส้น โค้ง	- เอกสารประ กอบการสอน รหัสที่ 5.2 - แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 5.2 - แบบสรุปเนื้อ หา รหัสที่ 5	/	/	/
6	9 - 11	1	17	1. บอกสูตรการหา อนุพันธ์ของฟังก์ชัน ได้ 2. พิสูจน์สูตรบาง สูตรของการหา อนุพันธ์ของฟังก์ชัน ได้	- การหา อนุพันธ์ของ ฟังก์ชันโดยใช้ สูตร สูตรที่ 1 - 3	- เอกสารประ กอบการสอน รหัสที่ 6.1 - แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 6.1 - แบบสรุปเนื้อ หา รหัสที่ 6	/	/	/
		2	18-19	3. หาอนุพันธ์ของ ฟังก์ชันที่กำหนดให้ โดยใช้สูตรได้	- การหา อนุพันธ์ของ ฟังก์ชันโดยใช้ สูตรที่ 4 - 6	- เอกสารประ กอบการสอน รหัสที่ 6.2 - แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 6.2 - แบบสรุปเนื้อ หา รหัสที่ 6	/	/	/

แผนการจัดการ เรียนรู้ที่	สัปดาห์ ที่	จำนวน ชั่วโมง สอน	ชั่วโมง ที่	จุดประสงค์ การเรียนรู้	สาระการ เรียนรู้	สื่อการเรียนรู้	การวัดผล		
							ราย จุดประ สงค์	กลาง ภาค	ปลาย ภาค
		1	20	3. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้โดยใช้สูตรได้	- การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตรที่ 7 – 8	- เอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 6.3 - แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 6.3 - แบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 6	/	/	/
		1	21	4. นำความรู้เรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้	- โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน	- เอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 6.4 - แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 6.4 - แบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 6	/	/	/
7	11-12	2	22-23	1. บอกความหมายของฟังก์ชันคอมโพสิทได้ 2. บอกกฎลูกโซ่ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิทได้ 3. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิทได้	- อนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิท	- ใบกิจกรรม รหัสที่ 7.1-7.2 - แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 7 - แบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 7	/	/	/
สอบกลางภาค									

แผนการจัดการ เรียนรู้ที่	สัปดาห์ ที่	จำนวน ชั่วโมง สอน	ชั่วโมง ที่	จุดประสงค์ การเรียนรู้	สาระการ เรียนรู้	สื่อการเรียนรู้	การวัดผล		
							รายจุด ประสงค์	กลาง ภาค	ปลาย ภาค
8	12-13	1	24	1. บอกความหมาย ของอนุพันธ์อันดับที่ $n$ ของฟังก์ชัน เมื่อ $n \in \mathbb{I}$ และ $n > 1$ ได้ 2. หาอนุพันธ์อันดับ ที่ $n$ ของฟังก์ชันที่ กำหนดให้ เมื่อ $n \in \mathbb{I}$ และ $n > 1$ ได้	- อนุพันธ์ อันดับสูง	- เอกสารประ กอบการสอน รหัสที่ 8.1 - แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 8.1 - แบบสรุปเนื้อ หา รหัสที่ 8	/	-	/
		1	25	3. นำความรู้เรื่อง อนุพันธ์อันดับสูงไป ใช้ในการแก้ปัญหา โจทย์ได้	- โจทย์เกี่ยวกับ การหาอนุพันธ์ อันดับสูง	- เอกสารประกอบกร สอนรหัส 8.2 - แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 8.2 - แบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 8	/	-	/
9	13-15	1	26	1. บอกทฤษฎีบท เกี่ยวกับฟังก์ชันลด และฟังก์ชันเพิ่มบน ช่วงใด ๆ และ นำไปใช้ได้	- ฟังก์ชันเพิ่ม และฟังก์ชันลด	- เอกสารประ กอบการสอน รหัสที่ 9.1 - แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 9.1 - แบบสรุปเนื้อ หา รหัสที่ 9	/	-	/
		1	27	2. บอกความหมาย และหาค่าสูงสุด สัมพัทธ์และค่าต่ำสุด สัมพัทธ์ของฟังก์ชัน ได้	- ค่าสูงสุด สัมพัทธ์และค่า ต่ำสุดสัมพัทธ์	- เอกสารประ กอบการสอน รหัสที่ 9.2 - แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 9.2 - แบบสรุปเนื้อ หา รหัสที่ 9.2	/	-	/

แผนการจัดการ เรียนรู้ที่	สัปดาห์ ที่	จำนวน ชั่วโมง สอน	ชั่วโมง ที่	จุดประสงค์ การเรียนรู้	สาระการ เรียนรู้	สื่อการเรียนรู้	การวัดผล		
							ราย จุดประ สงค์	กลาง ภาค	ปลาย ภาค
		1	28	4. หาค่าต่ำสุด สัมบูรณ์และค่าสูงสุด สัมบูรณ์ของฟังก์ชันที่ กำหนดให้ได้	- ค่าสูงสุด สัมบูรณ์และ ค่าต่ำสุด สัมบูรณ์	- เอกสารประ กอบการสอน รหัสที่ 9.3 - แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 9.3 - แบบสรุปรื้อ หา รหัสที่ 9	/	-	/
		1	29	5. นำความรู้เกี่ยวกับ อนุพันธ์ของฟังก์ชัน ไปใช้ในการแก้ปัญหา โจทย์การหาค่าสูงสุด สัมบูรณ์และค่าต่ำสุด สัมบูรณ์ได้	- โจทย์ เกี่ยวกับการ หาค่าสูงสุด สัมบูรณ์และ ค่าต่ำสุด สัมบูรณ์	- แผ่นโปรงใส รหัสที่ 9.1-9.2 - แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 9.4	/	-	/
10	15 - 16	2	30-31	1. บอกความหมาย ของกระบวนการ ตรงกันข้ามกับการหา อนุพันธ์ได้ 2. หาปฏิยานุพันธ์ ของฟังก์ชันที่ กำหนดให้ได้	- กระบวนการ ตรงข้ามกับ การหาอนุพันธ์	- เอกสารประ กอบการสอน รหัสที่ 10 - แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 10 - แบบสรุปรื้อ หา รหัสที่ 10	/	-	/
11	16 - 18	1	32	1. บอกความหมาย ของอินทิกรัลไม่จำกัด เขตได้ 2. บอกสัญลักษณ์ที่ ใช้แทนอินทิกรัลไม่ จำกัดเขตได้	- ความหมาย ของอินทิกรัล ไม่จำกัดเขต - สัญลักษณ์ ของอินทิกรัล ไม่จำกัดเขต	- เอกสารประ กอบการสอน รหัสที่ 11.1 - แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 11.1 - แบบสรุปรื้อ หา รหัสที่ 11	/	-	/



แผนการจัดการ เรียนรู้ที่	สัปดาห์ ที่	จำนวน ชั่วโมง สอน	ชั่วโมง ที่	จุดประสงค์ การเรียนรู้	สาระการ เรียนรู้	สื่อการเรียนรู้	การวัดผล		
							รายจุด ประสงค์	กลาง ภาค	ปลาย ภาค
		1	33	3. บอกสูตรเกี่ยวกับการอินทิเกรตที่นำมาใช้ในการหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันได้ 4. หาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันได้	- การหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขต โดยใช้สูตรที่ 1 – 3	- เอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 11.2 - แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 11.2 - แบบสรุปรเนื้อหา รหัสที่ 11	/	-	/
		1	34	เช่นเดียวกับชั่วโมงที่ 33	- การหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตโดยใช้สูตรที่ 4 – 5	- เอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 11.3 - แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 11.3 - แบบสรุปรเนื้อหา รหัสที่ 11	/	-	/
		1	35	5. นำความรู้เรื่องอินทิกรัลไม่จำกัดเขตไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้	- โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับอินทิกรัลไม่จำกัดเขต	- เอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 11.4 - แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 11.4	/	-	/
12	18 - 19	2	36-37	1. บอกสัญลักษณ์อินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชันได้ 2. บอกทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัสได้ 3. หาอินทิกรัลจำกัดเขต โดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัสได้	- อินทิกรัลจำกัดเขต	- เอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 12 - แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 12 - แบบสรุปรเนื้อหา รหัสที่ 12	/	-	/

แผนการจัดการ เรียนรู้ที่	สัปดาห์ ที่	จำนวน ชั่วโมง สอน	ชั่วโมง ที่	จุดประสงค์ การเรียนรู้	สาระการ เรียนรู้	สื่อการเรียนรู้	การวัดผล		
							ราย จุดประ สงค์	กลาง ภาค	ปลาย ภาค
13	19 - 20	2	38-39	1. บอกความหมาย ของพื้นที่ที่ปิดล้อม ด้วยเส้นโค้งได้ 2. บอกสัญลักษณ์ที่ ใช้แทนพื้นที่ที่ปิด ล้อมด้วยเส้นโค้งได้ 3. หาพื้นที่ที่ปิดล้อม ด้วยเส้นโค้งของ ฟังก์ชันที่กำหนดให้ ได้	- พื้นที่ที่ปิด ล้อมด้วยเส้น โค้ง	- เอกสารประก อบการสอน รหัสที่ 13  - แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 13  - แบบสรุปเนื้อ หา รหัสที่ 13	/	-	/
		1	40	เช่นเดียวกับชั่วโมงที่ 38 – 39	- พื้นที่ที่ปิด ล้อมด้วยเส้น โค้ง	- เอกสารฝึกหัด ทบทวน รหัสที่ 13  - แบบทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ เรื่องการอินทิ เกรต	-	-	-
สอบปลายภาค									

กำหนดการวัดผล รายวิชาคณิตศาสตร์ (ม. 4 – ม. 6)  
ภาคเรียนที่ 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

หน่วยการเรียนรู้ที่	ชื่อหน่วยการเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	การเก็บคะแนน							
			รายจุดประสงค์			รวม	กลางภาค		ปลายภาค	
			ความรู้	ทักษะ กระบวนการ	คุณลักษณะ		ข้อทดสอบ		ข้อทดสอบ	
			คะแนน	คะแนน	คะแนน		ข้อ	คะแนน	ข้อ	คะแนน
1	ขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	1.1 ขีดจำกัดของฟังก์ชัน	5	3	2	10	3	3	2	2
		1.2 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	5	3	2	10	4	4	4	4
2	อนุพันธ์ของฟังก์ชัน	2.1 อัตราการเปลี่ยนแปลง	3	2	1	6	2	2	2	2
		2.2 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้ नियาม	3	2	1	6	2	2	2	2
		2.3 ความชันของเส้นโค้ง	5	3	2	10	3	3	3	3
		2.4 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร	6	3	3	12	4	4	4	4
		2.5 อนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิท	3	2	1	6	2	2	2	2
สอบกลางภาค	คะแนนรวม		-	-	-	60	20	20		
	คะแนนจริง		-	-	-	20	-	20		

หน่วยการเรียนรู้ที่	ชื่อหน่วยการเรียนรู้	สาระการเรียนรู้	การเก็บคะแนน							
			รายจุดประสงค์			รวม	กลางภาค		ปลายภาค	
			ความรู้	ทักษะ กระบวนการ	คุณลักษณะ		ข้อทดสอบ		ข้อทดสอบ	
			คะแนน	คะแนน	คะแนน	ข้อ	คะแนน	ข้อ	คะแนน	
3	การ อินทิเกรต	3.1 กระบวนการตรงข้าม กับการหาอนุพันธ์	5	3	2	10	-	-	2	2
		3.2 อินทิกรัลไม่จำกัด เขต	6	3	3	12	-	-	5	5
		3.3 อินทิกรัลจำกัดเขต	6	3	3	12	-	-	5	5
		3.4 พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วย เส้น โค้ง	6	3	3	12	-	-	4	4
สอบปลายภาค	รวมคะแนน	-	-	-	60	-	-	40	40	
	คะแนนจริง	-	-	-	30	-	-	-	20	
รวมคะแนนจริงตลอดภาคเรียน			50			20		30		

หมายเหตุ จำนวนคะแนนและข้อสอบอาจเปลี่ยนแปลงได้ตามความเหมาะสม

รายละเอียดของแผนการจัดการเรียนรู้ รายวิชาคณิตศาสตร์ (ม.4 – ม.6)  
ภาคเรียนที่ 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

หน่วยการเรียนรู้ที่	แผนการจัดการเรียนรู้ที่	สาระการเรียนรู้	จำนวนชั่วโมงสอน	ชั่วโมงที่	หมายเหตุ
1	1	ลิมิตของฟังก์ชัน	5	3-7	ชั่วโมงที่ 1 - ปฐมนิเทศ ก่อนเรียน
	2	ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	5	8 - 12	
2	3	อัตราการเปลี่ยนแปลง	5	13 - 17	ชั่วโมงที่ 2 - ทดสอบ ก่อนเรียน
	4	การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้นิยาม	5	18 - 22	
	5	ความชันของเส้นโค้ง	5	23 - 27	
	6	การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร	8	28 - 35	
	7	อนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิท	4	36 - 39	
	8	อนุพันธ์อันดับสูง	3	40 - 42	
	9	การประยุกต์อนุพันธ์	5	43 - 47	
3	10	กระบวนการตรงข้ามกับการหาอนุพันธ์	3	48 - 50	
	11	อินทิกรัลไม่จำกัดเขต	4	51 - 54	
	12	อินทิกรัลจำกัดเขต	3	55 - 57	
	13	พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง	3	58 - 60	
รวม			58		

**ชั่วโมงที่ 1 ปฐมนิเทศ**  
**วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202**  
**ภาคเรียนที่ 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6**

1. ผู้สอน นายวิเชียร กิรติศักดิ์กุล
2. หน่วยการเรียนรู้ 1.0 หน่วยการเรียนรู้
3. จำนวนชั่วโมงเรียน 2 ชั่วโมง / สัปดาห์, 40 ชั่วโมง / ภาคเรียน
4. การวัดผลและประเมินผล
  - 4.1 อัตราส่วนของคะแนนระหว่างภาคเรียน : ปลายภาค = 70 : 30  
**คะแนนระหว่างภาคเรียน** ประกอบด้วย
    - คะแนนรายจุดประสงค์ (หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 – 3) ซึ่งประเมินทั้ง 3 ด้าน คือ  
 ด้านความรู้ ด้านทักษะกระบวนการ และด้านคุณลักษณะ 50 คะแนน
    - คะแนนสอบกลางภาค 20 คะแนน
    - คะแนนสอบปลายภาค 30 คะแนน
  - 4.2 การประเมินการอ่าน คิด วิเคราะห์เขียน ต้องผ่านเกณฑ์ขั้นต่ำตามที่โรงเรียนกำหนด
  - 4.3 การประเมินคุณลักษณะต้องผ่านเกณฑ์ขั้นต่ำตามที่กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์และโรงเรียนกำหนด
5. เกณฑ์การให้ระดับผลการเรียน มีดังนี้
 

0 – 49	ได้รับระดับผลการเรียน 0
50 – 54	ได้รับระดับผลการเรียน 1
55 – 59	ได้รับระดับผลการเรียน 1.5
60 – 64	ได้รับระดับผลการเรียน 2
65 – 69	ได้รับระดับผลการเรียน 2.5
70 – 74	ได้รับระดับผลการเรียน 3
75 – 79	ได้รับระดับผลการเรียน 3.5
80 – 100	ได้รับระดับผลการเรียน 4
6. เวลาเรียน  
 นักเรียนต้องมีเวลาเรียนไม่น้อยกว่า 80% คือ ไม่ต่ำกว่า 32 ชั่วโมง และขาดได้ไม่เกิน 8 ชั่วโมง
7. กำหนดเวลาเรียน  
 เรียนสัปดาห์ละ 2 ชั่วโมง ภายในช่วงวันจันทร์ – ศุกร์ ถ้าเวลาเรียนไม่ครบ 40 ชั่วโมง ต่อภาคเรียน ต้องเรียนชดเชยในเวลาว่างหรือวันหยุด เพื่อให้ครบตามที่ระบุไว้
8. อุปกรณ์การเรียน  
 สมุดปกแข็ง 1 เล่ม สำหรับจดงานและทำแบบฝึกหัดเพิ่มเติม เพื่อส่งเสริมความแม่นยำในการเรียนรู้ตามที่ได้รับมอบหมายในแต่ละชั่วโมง
9. จุดประสงค์การเรียนรู้ วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6  
 ผู้สอนพิมพ์แจก

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>แบบทดสอบก่อนเรียน/          หลังเรียน</b>	กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง - ลิมิตและความต่อเนื่อง ของฟังก์ชัน - อนุพันธ์ของฟังก์ชัน - การอินทิเกรต ใช้เวลาสอบ 1 ชั่วโมง
---	--	--

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนแสดงวิธีทำทุกข้อ

1. จงหาค่าของ  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 27x + 36}{x^2 + 3x - 4}$
2. กำหนดให้  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} & \text{เมื่อ } x \neq 4 \\ 3k & \text{เมื่อ } x = 4 \end{cases}$   
 จงหาค่า  $k$  ที่ทำให้  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 4$
3. กำหนดให้  $y = 6x^3 - 5x^2 + x - 3$  จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ  $y$  เทียบกับ  $x$  ขณะ  $x = 4$
4. จงหาสมการของเส้นตรงซึ่งขนานกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง  $y = x^2 - 2x + 4$  ที่จุด  $(-2, 5)$  และผ่านจุด  $(-4, 3)$
5. กำหนดให้  $f(x) = \frac{3x + 1}{2x - 1}$  และ  $g(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$  จงหาอนุพันธ์ของ  $[f(x) + g(x)]$  ที่  $x = 1$
6. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง  $y = x^3 - 6x^2 + 8x$  กับแกน  $X$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 12 สัปดาห์ที่ 19 ชั่วโมงที่ 55 – 57	เรื่อง อินทิกรัลจำกัดเขต จำนวนชั่วโมงสอน 3 ชั่วโมง
---	---	---

### จุดประสงค์การเรียนรู้

1. ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ
  - 1.1 บอกสัญลักษณ์อินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชัน  $f$  บนช่วง  $[a, b]$  ได้
  - 1.2 บอกทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัสได้
  - 1.3 หาอินทิกรัลจำกัดเขตโดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลได้
2. ด้านทักษะกระบวนการ นักเรียนมีความสามารถ
  - 2.1 ในการแก้ปัญหา
  - 2.2 ในการให้เหตุผล
  - 2.3 ในการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ
  - 2.4 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์
3. ด้านคุณลักษณะ นักเรียน
  - 3.1 มีความรับผิดชอบ
  - 3.2 มีความซื่อสัตย์
  - 3.3 มีความเชื่อมั่นในตนเอง
  - 3.4 มีระเบียบวินัย

### สาระการเรียนรู้

1. อินทิกรัลจำกัดเขต
2. สัญลักษณ์ของอินทิกรัลจำกัดเขต
3. ทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัส



## กิจกรรมการเรียนรู้

ชั่วโมงที่	กิจกรรมการเรียนรู้ / สื่อการเรียนรู้
55 – 57	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. แจงจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ ว่า เมื่อเรียนจบแผนการเรียนรู้แล้ว นักเรียนจะสามารถ             <ul style="list-style-type: none"> <li>- บอกสัญลักษณ์อินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชัน <math>f</math> บนช่วง <math>[a, b]</math> ได้</li> <li>- บอกทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัสได้</li> <li>- หาอินทิกรัลจำกัดเขตโดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลได้</li> </ul> </li> <li>2. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขต โดยใช้การถาม – ตอบ</li> <li>3. นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 12 แล้วร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับการหาอินทิกรัลจำกัดเขต โดยครูคอยอธิบายเพิ่มเติมเมื่อนักเรียนมีข้อสงสัย หลังจากนั้นให้บันทึกลงในแบบสรุปรเนื้อหา รหัสที่ 12</li> <li>4. ครูแจกโจทย์การหาอินทิกรัลจำกัดเขตให้แต่ละกลุ่ม จำนวน 1 ข้อ ให้เวลา 5 นาที กลุ่มใดทำเสร็จก่อนและถูกต้อง เป็นผู้ชนะ จะได้รับรางวัลจากครูผู้สอน</li> <li>5. ครูชมเชยนักเรียนที่สนใจร่วมกิจกรรมและตั้งใจเรียน เพื่อเป็นการเสริมแรงในการเรียนรู้ของนักเรียน</li> <li>6. นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 12 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลย และบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง ถ้านักเรียนกลุ่มใดทำไม่เสร็จให้ทำเป็นการบ้าน</li> </ol>

### สื่อการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 12
2. แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 12
3. แบบสรุปรเนื้อหา รหัสที่ 12

### แหล่งการเรียนรู้

1. ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
2. ห้องสมุดโรงเรียน
3. ห้องสมุดประชาชน
4. อินเทอร์เน็ต

### หลักฐานการเรียนรู้

1. แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 12
2. แบบสรุปรเนื้อหา รหัสที่ 12



### การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นักเรียนส่วนใหญ่ตอบคำถามได้ถูกต้อง
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	2. นักเรียนสนใจร่วมกิจกรรมดี
3. การทำแบบฝึกทักษะ	3. นักเรียนส่วนใหญ่ทำได้ถูกต้อง
4. การทำแบบสรุปเนื้อหา	4. นักเรียนส่วนใหญ่สรุปเนื้อหาได้ถูกต้องครบถ้วน

### บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

#### 1. สรุปผลการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

#### 2. แนวทางในการแก้ไขและพัฒนา

.....

.....

.....

.....

.....

#### 3. ข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ ..... ครูผู้สอน

(นายวิเชียร กิรติศักดิ์กุล)

ครู วิทยฐานะ ครูชำนาญการพิเศษ

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ. ....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัสเอกสารประกอบการสอนที่ 12 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 12 ชั่วโมงที่ 55-57 จำนวนชั่วโมงสอน 3 ชั่วโมง
---	--------------------	---

### จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1.1 บอกสัญลักษณ์อินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชันบนช่วง  $[a, b]$  ได้
- 1.2 บอกทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัสได้
- 1.3 หาอินทิกรัลจำกัดเขต โดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัสได้

### สาระสำคัญ

ให้  $y = f(x)$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $[a, b]$  อินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชัน  $f$  บนช่วง  $[a, b]$  แทนด้วยสัญลักษณ์  $\int_a^b f(x) dx$  ซึ่งในการคำนวณอินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชัน  $y = f(x)$  บนช่วง  $[a, b]$  นั้น จะใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัส ส่วนในการคำนวณ จะทำให้หาอินทิกรัลจำกัดเขตได้รวดเร็วยิ่งขึ้น และสามารถนำไปใช้ในการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งอีกด้วย

### สาระการเรียนรู้

#### ทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัส

ในการหาอินทิกรัลจำกัดเขตจะใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัสช่วยในการคำนวณ ดังนี้

#### ทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัส

เมื่อ  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $[a, b]$  ถ้า  $F$  เป็นฟังก์ชันบนช่วง  $[a, b]$  โดยที่  $F'(x) = f(x)$  แล้ว  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

จากทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัส เราจะเขียนสัญลักษณ์

$$F(x) \Big|_a^b \text{ แทน } F(b) - F(a)$$

$$\text{ถ้า } F'(x) = f(x) \text{ ดังนั้น } \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหา  $\int_0^1 x^2 dx$

วิธีทำ  $\therefore f(x) = x^2$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องใน  $R$

$\therefore$  ฟังก์ชัน  $f$  จึงเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วง  $[0, 1]$

และเนื่องจากปฏิยานุพันธ์ของ  $f(x) = x^2$  คือ  $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \int_0^1 x^2 dx &= \left( \frac{x^3}{3} + C \right) \Big|_0^1 \\ &= \left( \frac{1}{3} + C \right) - (0 + C) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 จงหา  $\int_{-1}^2 (3x^2 - 2x) dx$

วิธีทำ วิธีที่ 1 ให้  $f(x) = 3x^2 - 2x$

$$\begin{aligned} \therefore \text{จะได้ } \int f(x) dx &= \int_{-1}^2 (3x^2 - 2x) dx \\ &= \frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} \\ &= x^3 - x^2 \end{aligned}$$

นั่นคือ  $F(x) = x^3 - x^2$

จากโจทย์  $a = -1$  และ  $b = 2$

$$\begin{aligned} \text{หา } F(b) &= F(2) \\ &= 2^3 - 2^2 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{หา } F(a) &= F(-1) \\ &= (-1)^3 - (-1)^2 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore F(b) - F(a) &= F(2) - F(-1) \\ &= 4 - (-2) = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{วิธีที่ 2 } \int_{-1}^2 (3x^2 - 2x) dx &= \left( x^3 - x^2 \right) \Big|_{-1}^2 \\ &= F(2) - F(-1) \\ &= (2^3 - 2^2) - ((-1)^3 - (-1)^2) \\ &= 4 - (-2) \\ &= 6 \end{aligned}$$

ตอบ

สรุป

วิธีการหาอินทิกรัลจำกัดเขต (ปริพันธ์จำกัดเขต) ทำได้ดังนี้

- ① หา  $F(x)$  โดยการนำ  $f(x)$  ไปหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขต แต่ไม่ต้องมาบวกค่าคงตัว

$$\int f(x) dx = F(x)$$

$$\text{หรือ } F'(x) = f(x)$$

- ② เมื่อได้  $F(x)$  จากข้อ 1 แล้วให้นำค่า  $a$  และ  $b$  ไปแทนในฟังก์ชัน  $F(x)$  และคำนวณค่า

$$F(b) - F(a)$$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบฝึกทักษะ	รหัสแบบฝึกทักษะที่ 12 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 12 ชั่วโมงที่ 55-57 จำนวนชั่วโมงสอน 3 ชั่วโมง
---	-------------	--

แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ข้อที่ 1.1 – 1.3

คำชี้แจง ให้นักเรียนหาอินทิกรัลจำกัดเขตแต่ละข้อต่อไปนี้ แล้วเติมคำตอบลงในตาราง  
ให้ถูกต้องสมบูรณ์

ข้อที่	คำถาม	คำตอบ
1	จงหา $\int_{-2}^2 (2x - 1) dx$	
2	จงหา $\int_{-1}^2 (x^2 - 4x) dx$	
3	จงหา $\int_{-3}^1 (x^2 + 3x - 4) dx$	
4	จงหา $\int_1^2 (3x^2 - x + 4) dx$	
5	จงหา $\int_1^3 (x^2 - 2x + 3) dx$	
6	จงหา $\int_{-1}^1 (-x^4 + x^2 - 1) dx$	
7	จงหา $\int_1^3 (3x^2 + x - 2) dx$	

คะแนนที่ได้ .....

ผู้ตรวจ .....

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ.....

ชื่อ .....

นามสกุล .....

ชั้น ..... เลขที่ .....

เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 12

- 1) -4
- 2) -3
- 3)  $-\frac{56}{3}$
- 4)  $9\frac{1}{2}$
- 5)  $\frac{20}{3}$
- 6)  $-\frac{4}{3}$
- 7) 26



รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม  
รหัสวิชา ค33202  
ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

### แบบสรุปรูเนื้อหา

รหัสแบบสรุปรูเนื้อหาที่ 12  
ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 12  
ชั่วโมงที่ 55-57 จำนวนชั่วโมงสอน 3 ชั่วโมง

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนสรุปรูเนื้อหาตามเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 12  
ตามหัวข้อต่อไปนี้

- สัญลักษณ์  $\int_a^b f(x) dx$  หมายถึง .....  
.....  
.....
- ทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัส กล่าวว่ .....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....
- ขั้นตอนในการหาอินทิกรัลจำกัดเขต (ปริพันธ์จำกัดเขต) มีดังนี้  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 สัปดาห์ที่ 3 – 5 ชั่วโมงที่ 8 – 12	เรื่อง ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน จำนวนชั่วโมงสอน 5 ชั่วโมง
---	--	--

### จุดประสงค์การเรียนรู้

#### 1. ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

- 1.1 บอกความหมายของความต่อเนื่องของฟังก์ชันได้
- 1.2 บอกได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด ๆ หนึ่งได้
- 1.3 บอกได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $(a, b)$  และ  $[a, b]$  ได้

#### 2. ด้านทักษะกระบวนการ นักเรียนมีความสามารถ

- 2.1 ในการแก้ปัญหา
- 2.2 ในการให้เหตุผล
- 2.3 ในการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ
- 2.4 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

#### 3. ด้านคุณลักษณะ นักเรียน

- 3.1 มีความรับผิดชอบ
- 3.2 มีความซื่อสัตย์
- 3.3 มีความเชื่อมั่นในตนเอง
- 3.4 มีระเบียบวินัย

### สาระการเรียนรู้

1. ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน
2. ความต่อเนื่องบนช่วง

## กิจกรรมการเรียนรู้

ชั่วโมงที่	กิจกรรมการเรียนรู้ / สื่อการเรียนรู้
8 – 10	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. แจกจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ ว่า เมื่อเรียนจบแผนการเรียนรู้นี้แล้ว นักเรียนจะสามารถ <ul style="list-style-type: none"> <li>- บอกความหมายของความต่อเนื่องของฟังก์ชันได้</li> <li>- บอกได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด ๆ หนึ่งได้</li> <li>- บอกได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง(a, b) และ [a, b] ได้</li> </ul> </li> <li>2. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาลิมิต โดยใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต โดยใช้การถาม – ตอบ</li> <li>3. ครูซักถามปัญหาเกี่ยวกับการทำเอกสารฝึกหัดเพิ่มเติมว่ากลุ่มใดมีปัญหาในการจัดทำอะไรบ้าง โดยครูอธิบายวิธีทำและให้ดูตัวอย่างประกอบ</li> <li>4. นักเรียนแต่ละกลุ่มศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 2.1 โดยศึกษาเนื้อหาและตัวอย่างให้ละเอียด แล้วร่วมกันสรุปความหมายของความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยครูคอยชี้แนะ และอธิบายเพิ่มเติม หลังจากนั้นบันทึกลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 2</li> <li>5. ครูเขียนโจทย์เกี่ยวกับการหาความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนกระดาน แล้วให้นักเรียนอาสาออกมาทำให้เพื่อนดู โดยมีครูและเพื่อนคอยตรวจสอบความถูกต้อง เพื่อเป็นการตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนอีกครั้ง</li> <li>6. นักเรียนทำแบบฝึกหัด รหัสที่ 2.1 เป็นการบ้าน เพื่อเสริมทักษะความแม่นยำในการเรียนรู้ของนักเรียน</li> </ol>
11 - 12	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. ให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจแบบฝึกหัด รหัสที่ 2.1 ตามแผนภูมิเฉลยและบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง</li> <li>2. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้การถาม – ตอบ</li> <li>3. นักเรียนแต่ละกลุ่มจับคู่กันศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 2.2 โดยศึกษาเนื้อหาและตัวอย่างให้ละเอียด แล้วร่วมกันสรุปความหมายความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนช่วง (a, b) และ [a, b] โดยครูคอยชี้แนะและอธิบายเพิ่มเติม หลังจากนั้นบันทึกลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 2</li> <li>4. นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 2.2 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลย และบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง</li> <li>5. นักเรียนแต่ละกลุ่มศึกษาโจทย์เกี่ยวกับความต่อเนื่องบนช่วง (a, b) และ [a, b] กลุ่มละ 1 ข้อ จัดทำเป็นรายงานส่งครูผู้สอนนอกเวลาเรียน</li> <li>6. นักเรียนทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์หลังจากเรียนจบหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 (แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 – 2) แล้ว เพื่อประเมินความก้าวหน้าของนักเรียน</li> </ol>

### สื่อการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 2.1 – 2.2
2. แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 2.1 – 2.2
3. แบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 2

### แหล่งการเรียนรู้

1. ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
2. ห้องสมุดโรงเรียน
3. ห้องสมุดประชาชน
4. อินเทอร์เน็ต

### หลักฐานการเรียนรู้

1. แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 2.1 – 2.2
2. แบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 2
3. รายงาน เรื่อง โจทย์ความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนช่วง  $(a, b)$  และ  $[a, b]$

### การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นักเรียนส่วนใหญ่ตอบคำถามได้ถูกต้อง
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	2. นักเรียนสนใจร่วมกิจกรรมดี
3. การทำแบบฝึกทักษะ	3. นักเรียนส่วนใหญ่ทำได้ถูกต้อง
4. การทำแบบสรุปเนื้อหา	4. นักเรียนส่วนใหญ่สรุปเนื้อหาได้ถูกต้อง
5. การทำรายงาน	5. นักเรียนส่วนใหญ่ทำได้ถูกต้องและสนใจในการทำกิจกรรมดี

บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

1. สรุปผลการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. แนวทางในการแก้ไขและพัฒนา

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. ข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ ..... ครูผู้สอน  
(นายวิเชียร กิรติศักดิ์กุล)  
ครู วิทยาลัยานะ ครูชำนาญการพิเศษ  
วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ. ....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัสเอกสารประกอบการสอนที่ 2.1 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 ชั่วโมงที่ 8-10 จำนวนชั่วโมงสอน 3 ชั่วโมง
---	--------------------	---

### จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1.1 บอกความหมายของความต่อเนื่องของฟังก์ชันได้
- 1.2 บอกได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด ๆ หนึ่งได้

### สาระสำคัญ

เมื่อ  $f$  เป็นฟังก์ชันของจำนวนจริง  $f$  จะต่อเนื่องที่จุด  $x = a$  ถ้า  $f$  มีสมบัติครบ 3 ประการ คือ

1.  $a$  ต้องอยู่ในโดเมน  $f$  และหาค่า  $f(a)$  ได้
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  หาค่าได้
3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

### สาระการเรียนรู้

#### ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

โดยทั่วไป เราจะนิยามฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนี้

- บทนิยาม** ให้  $a$  เป็นจำนวนจริงใด ๆ ฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = a$  เมื่อฟังก์ชัน  $f$  มีสมบัติ ดังนี้
1.  $f(a)$  หาค่าได้
  2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  หาค่าได้
- และ
3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

**ตัวอย่างที่ 1** จงพิจารณาว่า  $f(x) = x^2 + 4$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 2$  หรือไม่  
**วิธีทำ** การที่  $f$  จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 2$  นั้น  $f$  ต้องมีสมบัติครบ 3 ข้อ  
 ตามนิยาม

$$\text{จาก } f(x) = x^2 + 4$$

$$1. \quad f(2) = 2^2 + 4 = 8$$

แสดงค่า หาค่า  $f(2)$  ได้

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 4 \\ = 2^2 + 4 \\ = 8$$

แสดงว่า  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  หาค่าได้

3. จากข้อ 1 และ 2 จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

$\therefore$  ที่จุด  $x = 2$  ฟังก์ชัน  $f$  มีลักษณะตามสมบัติทั้ง 3 ข้อ

แสดงว่า  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด  $x = 2$

**ตอบ**

**ตัวอย่างที่ 2** จงพิจารณาว่า  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 3$  หรือไม่

**วิธีทำ** การที่  $f$  จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 3$  นั้น  $f$  ต้องมีสมบัติครบ 3 ข้อ  
 ตามนิยาม

$$\text{จาก } f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$\therefore \quad f(3) = \frac{3^2 - 9}{3 - 3} \\ = \frac{0}{0} \quad \text{ซึ่งไม่มีความหมาย}$$

แสดงว่า หาค่า  $f(3)$  ไม่ได้

$\therefore$  ฟังก์ชัน  $f$  ไม่มีลักษณะตามสมบัติข้อที่ 1

แสดงว่า  $f$  ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด  $x = 3$

**ตอบ**

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & , x \neq 2 \\ 4 & , x = 2 \end{cases}$  จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน  $f$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 2$  หรือไม่

วิธีทำ การที่  $f$  จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 2$  นั้น  $f$  ต้องมีสมบัติครบ 3 ข้อ  
ตามนิยาม

$$\text{จาก } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & , x \neq 2 \\ 4 & , x = 2 \end{cases}$$

$$1) \quad f(2) = 4$$

แสดงว่าหาค่า  $f(2)$  ได้ และมีสมบัติตามข้อ 1

$$\begin{aligned} 2) \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

แสดงว่าหาค่า  $f(x)$  ได้ และมีสมบัติตามข้อ 2

$$3) \quad \text{จากข้อ 1 และข้อ 2 จะเห็นว่า } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

นั่นคือ  $f$  มีสมบัติครบ 3 ข้อ ดังนั้น  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 2$       **ตอบ**



รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>แบบฝึกทักษะ</b>	รหัสแบบฝึกทักษะที่ 2.1 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 ชั่วโมงที่ 8-10 จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
---	--------------------	---

### แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ข้อที่ 1.1

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนพิจารณาฟังก์ชันในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุดกำหนดให้หรือไม่ โดยกาเครื่องหมาย ✓ ลงในตารางให้ถูกต้อง

ข้อที่	ฟังก์ชันที่กำหนดให้	จุดที่กำหนดให้	ฟังก์ชันต่อเนื่อง ณ จุดกำหนดให้	
			เป็น	ไม่เป็น
1	$f(x) = 3x - 1$	$x = 0$		
2	$f(x) = 3x^2 + 5$	$x = -4$		
3	$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$	$x = 4$		
4	$f(x) = 2x^2 - 1$	$x = 3$		
5	$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$	$x = 1$		
6	$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{เมื่อ } x \neq 3 \\ 6 & \text{เมื่อ } x = 3 \end{cases}$	$x = 3$		
7	$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{เมื่อ } x \neq 1 \\ 2 & \text{เมื่อ } x = 1 \end{cases}$	$x = 1$		
8	$f(x) = \frac{1}{x}$	$x = 0$		

คะแนนที่ได้ .....

ผู้ตรวจ .....

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ.....

ชื่อ .....

นามสกุล .....

ชั้น ..... เลขที่ .....

เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 2.1

ข้อที่	ฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุดกำหนดให้	
	เป็น	ไม่เป็น
1	3	-
2	3	-
3	3	-
4	3	-
5	-	3
6	3	-
7	-	3
8	-	3

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัสเอกสารประกอบการสอนที่ 2.2 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 ชั่วโมงที่ 11 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
---	--------------------	---

### จุดประสงค์การเรียนรู้

1.3 บอกได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $(a, b)$  และ  $[a, b]$  ได้

### สาระสำคัญ

ฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $(a, b)$  ก็ต่อเมื่อ  $f$  ต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดในช่วง  $(a, b)$  และฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $[a, b]$  ก็ต่อเมื่อ  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดในช่วง  $(a, b)$  และ  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$  และ  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$

### สาระการเรียนรู้

#### ความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนช่วง

โดยทั่วไปเราสามารถนิยามความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนช่วงเปิดและช่วงปิด ได้ดังนี้

**บทนิยาม** ฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด  $(a, b)$  เมื่อฟังก์ชัน  $f$  นั้น ต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดบนช่วง  $(a, b)$

**บทนิยาม** ฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด  $[a, b]$  เมื่อ

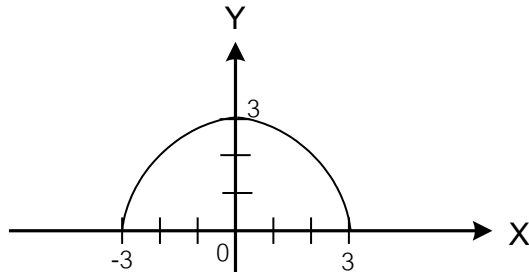
1.  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด  $(a, b)$

2.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

3.  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$

ตัวอย่างที่ 1 จงพิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชัน  $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

วิธีทำ จาก  $f(x) = \sqrt{9-x^2}$   
สามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



- จะพบว่า
1.  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดบนช่วงเปิด  $(-3, 3)$
  2.  $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = f(-3) = 0$
  3.  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3) = 0$

จากข้อ 1, 2 และ 3 สรุปได้ว่า

$f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด  $[-3, 3]$

ตัวอย่างที่ 2 ฟังก์ชัน  $f(x) = \sqrt{x}$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $(0, \infty)$  หรือไม่

วิธีทำ จาก  $f(x) = \sqrt{x}$

ให้  $a \in (0, \infty)$

$$f(a) = \sqrt{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

ดังนั้น ฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่องที่ทุก  $x \in (0, \infty)$

ตอบ

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>แบบฝึกทักษะ</b>	รหัสแบบฝึกทักษะที่ 2.2 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 ชั่วโมงที่ 12 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
---	--------------------	---

### แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ข้อที่ 1.3

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนแสดงวิธีทำในแต่ละข้อให้ถูกต้องสมบูรณ์

<p>1) กำหนด <math>f(x) = \sqrt{36 - x^2}</math> จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน <math>f</math> ต่อเนื่องบนช่วง <math>[-6, 6]</math> หรือไม่ วิธีทำ .....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>2) กำหนด <math>f(x) = \sqrt{64 - x^2}</math> จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน <math>f</math> ต่อเนื่องบนช่วง <math>[-7, 7]</math> หรือไม่ วิธีทำ .....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
--	---

คะแนนที่ได้ .....

ผู้ตรวจ .....

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ.....

ชื่อ .....

นามสกุล .....

ชั้น ..... เลขที่ .....

## เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 2.2

1) **วิธีทำ** จาก  $f(x) = \sqrt{36 - x^2}$   
ให้  $a \in (-6, 6)$   
 $\therefore f(a) = \sqrt{36 - a^2}$  ซึ่งหาค่าได้  

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{36 - x^2}$$

$$= \sqrt{36 - a^2}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$
จะได้ว่า  $f$  ต่อเนื่องที่  $x = a$  แต่  
 $a \in (-6, 6)$   
ดังนั้น  $f$  ต่อเนื่องบนช่วง  $(-6, 6)$   
เนื่องจาก  $f(-6) = \sqrt{36 - (-6)^2}$   
 $= 0$   
และ  $f(6) = \sqrt{36 - 6^2}$   
 $= 0$   

$$\lim_{x \rightarrow -6^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -6^+} \sqrt{36 - x^2}$$

$$= 0$$

$$= f(-6)$$
  

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} \sqrt{36 - x^2}$$

$$= 0$$

$$= f(6)$$
สรุปได้ว่า  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง

$[-6, 6]$

2) **วิธีทำ** จาก  $f(x) = \sqrt{49 - x^2}$   
ให้  $a \in (-7, 7)$   
 $\therefore f(a) = \sqrt{49 - a^2}$  ซึ่งหาค่าได้  

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{49 - x^2}$$

$$= \sqrt{49 - a^2}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$
จะได้ว่า  $f$  ต่อเนื่องที่  $x = a$  แต่  
 $a \in (-7, 7)$   
ดังนั้น  $f$  ต่อเนื่องบนช่วง  $(-7, 7)$   
เนื่องจาก  $f(-7) = 0$  และ  $f(7) = 0$   

$$\lim_{x \rightarrow -7^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -7^+} \sqrt{49 - x^2}$$

$$= 0$$

$$= f(-7)$$
  

$$\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7^-} \sqrt{49 - x^2}$$

$$= 0$$

$$= f(7)$$
 $\therefore f$  ต่อเนื่องบนช่วง  $[-7, 7]$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบสรุปเนื้อหา	รหัสแบบสรุปเนื้อหาที่ 2 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 ชั่วโมงที่ 8-12 จำนวนชั่วโมงสอน 3 ชั่วโมง
---	----------------	--

คำชี้แจง ให้นักเรียนสรุปเนื้อหาจากเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 2.1 - 2.2  
ตามหัวข้อต่อไปนี้

---

1. ฟังก์ชัน  $f$  จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = a$  เมื่อ  $a \in \mathbb{R}$  จะต้องมีสมบัติครบ 3 ข้อ  
คือ
  - 1.1 .....
  - 1.1 .....
  - 1.1 .....
  
2. ฟังก์ชัน  $f$  จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด  $[a, b]$  จะต้องมีสมบัติ ดังนี้
  - 2.1 .....
  - 2.2 .....
  - 2.3 .....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>แบบทดสอบ          วัตถุประสงค์</b>	หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน เวลา 1 ชั่วโมง
---	---	--

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนแสดงวิธีทำทุกข้อ

<p>1. จงหาค่าของ <math>\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3}</math></p> <p>2. จงหาค่าของ <math>\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x + 3}</math></p> <p>3. กำหนด <math>f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} &amp; , x \neq -3 \\ 2x - 1 &amp; , x = 3 \end{cases}</math> ฟังก์ชัน <math>f</math> ต่อเนื่องที่ <math>x = 3</math> หรือไม่</p> <p>4. กำหนด <math>f(x) = \sqrt{64 - x^2}</math> ฟังก์ชัน <math>f</math> ต่อเนื่องบนช่วง <math>[-8, 8]</math> หรือไม่</p>
---



กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ สาระที่ - เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน	<b>หน่วยการเรียนรู้ที่ 2</b>	รายวิชา คณิตศาสตร์ (ม. 6) เวลา 35 ชั่วโมง
---	------------------------------	---

### ผลการเรียนรู้

1. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
2. นำความรู้เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชันไปประยุกต์ใช้ได้

### สาระการเรียนรู้

1. อัตราการเปลี่ยนแปลง
2. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน
3. ความชันของเส้นโค้ง
4. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตโดยใช้สูตร
5. อนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิท
6. อนุพันธ์อันดับสูง
7. การประยุกต์ของอนุพันธ์

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 สัปดาห์ที่ 5 – 6 ชั่วโมงที่ 13 – 17	เรื่อง อัตราการเปลี่ยนแปลง จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
---	---	---

### จุดประสงค์การเรียนรู้

1. ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ
  - 1.1 หาความเร็วในระยะเวลาใด ๆ เมื่อกำหนดสมการการเคลื่อนที่มาให้ได้
  - 1.2 บอกความหมายอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย และอัตราการเปลี่ยนแปลงขณะใด ๆ ของฟังก์ชันได้
  - 1.3 หาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย ขณะใด ๆ ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
2. ด้านทักษะกระบวนการ นักเรียนมีความสามารถ
  - 2.1 ในการแก้ปัญหา
  - 2.2 ในการให้เหตุผล
  - 2.3 ในการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ
  - 2.4 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์
3. ด้านคุณลักษณะ นักเรียน
  - 3.1 มีความรับผิดชอบ
  - 3.2 มีความซื่อสัตย์
  - 3.3 มีความเชื่อมั่นในตนเอง
  - 3.4 มีระเบียบวินัย

### สาระการเรียนรู้

1. ความเร็วเฉลี่ย
2. อัตราการเปลี่ยนแปลง

### กิจกรรมการเรียนรู้

ชั่วโมงที่	กิจกรรมการเรียนรู้ / สื่อการเรียนรู้
13 – 15	<p>1. แจ้างจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบว่า เมื่อเรียนจบแผนการเรียนรู้แล้ว นักเรียนจะสามารถ</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- หาความเร็วในระยะเวลาใด ๆ เมื่อกำหนดสมการการเคลื่อนที่มาให้ได้</li> <li>- บอกนิยามอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยและอัตราการเปลี่ยนแปลงขณะใด ๆ ของฟังก์ชันได้</li> <li>- หาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยขณะใด ๆ ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้</li> </ul> <p>2. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชัน การหาค่าของฟังก์ชันที่กำหนดให้ โดยใช้การถาม – ตอบ</p> <p>3. นักเรียนแต่ละกลุ่มศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 3 โดยศึกษาเนื้อหา และตัวอย่างให้ละเอียด โดยครูคอยชี้แนะและอธิบายเพิ่มเติม เมื่อมีนักเรียนสงสัย หลังจากนั้นบันทึกลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 3</p> <p>4. นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 3 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลย และบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง</p> <p>5. นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันสร้างโจทย์เกี่ยวกับอัตราการเปลี่ยนแปลง โดยการศึกษาจากหนังสือต่าง ๆ ที่ครูเตรียมไว้ให้หรือจากโจทย์เกี่ยวกับอัตราการเปลี่ยนแปลงที่ครูเตรียมไว้ โดยการสร้างเลียนแบบหรือคิดขึ้นเอง โดยเขียนลงในกระดาษ A4 พร้อมทั้งแสดงวิธีทำ และตกแต่งให้สวยงาม นำส่งครูผู้สอนนอกเวลาเรียน</p> <p>6. นักเรียนทำเอกสารฝึกหัดเพิ่มเติม รหัสที่ 3 เป็นการบ้าน เพื่อเสริมทักษะและความแม่นยำในการเรียนรู้</p>

### สื่อการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 3
2. แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 3
3. แบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 3
4. เอกสารฝึกหัดเพิ่มเติม รหัสที่ 3

### แหล่งการเรียนรู้

1. ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
2. ห้องสมุดโรงเรียน
3. ห้องสมุดประชาชน

### หลักฐานการเรียนรู้

1. แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 3
2. แบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 3
3. โจทย์คณิตศาสตร์ เรื่อง อัตราการเปลี่ยนแปลง

## การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นักเรียนส่วนใหญ่ตอบคำถามได้ถูกต้อง
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	2. นักเรียนส่วนใหญ่สนใจร่วมกิจกรรมดี
3. การทำแบบฝึกทักษะ	3. นักเรียนส่วนใหญ่ทำได้ถูกต้อง
4. การทำแบบสรุบน้ำ้อหา	4. นักเรียนส่วนใหญ่สรุบน้ำ้อหาได้ถูกต้อง
5. การสร้างโจทย์เรื่อง อัตราการเปลี่ยนแปลง	5. นักเรียนทุกกลุ่มสร้างโจทย์ และแสดงวิธีทำได้ถูกต้อง

## บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

## 1. สรุปผลการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## 2. แนวทางในการแก้ไขและพัฒนา

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## 3. ข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ ..... ครูผู้สอน

(นายวิเชียร กิรติศักดิ์กุล)

ครู วิทยฐานะ ครูชำนาญการพิเศษ

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ. ....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>เอกสารประกอบการสอน</b>	รหัสเอกสารประกอบการสอนที่ 3 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 ชั่วโมงที่ 13-17 จำนวนชั่วโมงสอน 5 ชั่วโมง
---	---------------------------	---

### จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1.1 หาความเร็วในระยะเวลาใด ๆ เมื่อกำหนดสมการการเคลื่อนที่มาให้ได้
- 1.2 บอกความหมายอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยและอัตราการเปลี่ยนแปลง ขณะใด ๆ ของฟังก์ชันได้
- 1.3 หาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย ขณะใด ๆ ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

### สาระสำคัญ

ถ้า  $y = f(x)$  เป็นฟังก์ชันใด ๆ เมื่อค่า  $x$  เปลี่ยนเป็น  $x + h$  โดยที่  $h \neq 0$  แล้วค่าของ  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  เรียกว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย และค่าของ  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  เรียกว่า อัตราการเปลี่ยนแปลง ณ  $x$  ใด ๆ

### สาระการเรียนรู้

#### อัตราการเปลี่ยนแปลง

โดยทั่วไปอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยและอัตราการเปลี่ยนแปลง ขณะใด ๆ ของฟังก์ชันนิยามได้ดังนี้

**บทนิยาม** ถ้า  $y = f(x)$  เป็นฟังก์ชันใด ๆ เมื่อค่าของ  $x$  เปลี่ยนเป็น  $x + h$  โดยที่  $h \neq 0$  ค่าของ  $y$  เปลี่ยนจาก  $f(x)$  เป็น  $f(x + h)$  แล้ว อัตราการเปลี่ยนแปลงของ  $y$  เทียบกับ  $x$  ในช่วง  $x$  ถึง  $x + h$  คือ  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ  $y$  เทียบกับ  $x$  ขณะ  $x$  มีค่าใด ๆ คือ  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

ตัวอย่างให้  $y = x^2 + 1$  จงหา

1. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ  $y$  เมื่อเทียบกับ  $x$  ในช่วง  $x = 3$  ถึง  $x = 5$
2. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ  $y$  เทียบกับ  $x$  ขณะที่  $x = 3$

วิธีทำ 1) จาก  $y = f(x) = x^2 + 1$

และอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ  $y$  เทียบกับ  $x$  ในช่วง  $x$  ถึง  $x + h$

$$\text{คือ } \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

∴ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ  $y$  เทียบกับ  $x$  ในช่วง  $x = 3$  ถึง  $x = 5$

$$\text{คือ } \frac{f(5) - f(3)}{h} = \frac{(5^2 + 1) - (3^2 + 1)}{5 - 3}$$

$$= \frac{26 - 10}{2} = 8$$

**ตอบ**

2) อัตราการเปลี่ยนแปลงของ  $y$  เทียบกับ  $x$  ขณะที่  $x$  มีค่าใด ๆ คือ

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{จาก } f(x) = x^2 + 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + 1 - (x^2 + 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2hx + h^2 + 1 - x^2 - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h)$$

$$= 2x$$

∴ อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะที่  $x = 3$  คือ  $2 \times 3 = 6$  **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดสมการการเคลื่อนที่  $S = 49t^2$  เมื่อ  $S$  เป็นระยะทางของการเคลื่อนที่มีหน่วยเป็นเมตร และเวลา  $t$  วินาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ  $S$  เทียบกับ  $t$  เมื่อ  $t$  เปลี่ยนจาก 4 เป็น 4.5

วิธีทำ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ  $S$  เทียบกับ  $t$

$$= \frac{4.9(t+h)^2 - 4.9t^2}{h}$$

$$= \frac{4.9(t^2 + 2th + h^2) - 4.9t^2}{h}$$

$$= \frac{4.9t^2 + 9.8th + 4.9h^2 - 4.9t^2}{h}$$

$$= \frac{9.8th + 4.9h^2}{h}$$

$$= 9.8t + 4.9h$$

$$\text{เมื่อ } t = 4, h = 4.5 - 4 = 0.5$$

$$\therefore \text{อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย} = 9.8(4) + 4.9(0.5)$$

$$= 39.2 + 24.5$$

$$= 41.65 \text{ เมตรต่อวินาที}$$

**ตอบ**

**สรุป**

การหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ  $y$  เทียบกับ  $x$  ขณะ  $x$  มีค่าใด ๆ มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 หา  $f(x)$

ขั้นที่ 2 หา  $f(x + h)$

ขั้นที่ 3 หา  $f(x + h) - f(x)$

ขั้นที่ 4 หา  $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

ขั้นที่ 5 หา  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>แบบฝึกทักษะ</b>	รหัสแบบฝึกทักษะที่ 3 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 ชั่วโมงที่ 13-15 จำนวนชั่วโมงสอน 3 ชั่วโมง
---	--------------------	--

### แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ข้อที่ 1.2 – 1.3

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนเติมคำตอบแต่ละข้อลงในตารางต่อไปนี้ให้ถูกต้องสมบูรณ์

ข้อที่	คำถาม	คำตอบ
1	ให้ $f(x) = 2x^2 - 2x + 7$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ $y$ เทียบกับ $x$ 1.1 เมื่อ $x$ เปลี่ยนจาก 3 ไปเป็น 6 1.2 เมื่อ $x$ เปลี่ยนจาก 4 ไปเป็น 8 1.3 เมื่อ $x$ เปลี่ยนจาก 5 ไปเป็น 10	
2	ให้ $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงขณะ $x = 5$	
3	จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงโดยเฉลี่ยของปริมาตรของทรงกลมเมื่อเทียบกับรัศมีตั้งแต่รัศมีเท่ากับ 2 นิ้ว ถึงรัศมีเท่ากับ 7 นิ้ว	
4	ให้ $f(x) = 3x^2 - 4x$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงขณะ $x = 4$	

คะแนนที่ได้ .....

ผู้ตรวจ .....

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ.....

ชื่อ .....

นามสกุล .....

ชั้น ..... เลขที่ .....

### เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 3

- |    |                    |                   |  |
|----|--------------------|-------------------|--|
| 1) | 1.1                | 48                |  |
|    | 1.2                | 88                |  |
|    | 1.3                | 154               |  |
| 2) | 65                 |                   |  |
| 3) | $\frac{268\pi}{7}$ | ลูกบาศก์นี้ / นี้ |  |
| 4) | 20                 |                   |  |

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>เอกสารฝึกหัดเพิ่มเติม</b>	รหัสเอกสารฝึกหัดเพิ่มเติมที่ 3 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 ชั่วโมงที่ 13-15 จำนวนชั่วโมงสอน 3 ชั่วโมง
---	------------------------------	--

#### คำชี้แจง

ให้นักเรียนแสดงวิธีทำทุกข้อ

1. ให้  $y = \sqrt{x}$  จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ  $y$  เทียบกับ  $x$  เมื่อ  $x$  เปลี่ยนจาก 4 ไปเป็น 9 และอัตราการเปลี่ยนแปลงขณะ  $x = 4$
2. ถ้าความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่งเปลี่ยนจาก 4.0 เซนติเมตร เป็น 4.4 เซนติเมตร จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมนี้เทียบกับความยาวของด้าน
3. ความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปหนึ่งเปลี่ยนจาก 10 เซนติเมตร เป็น 12 เซนติเมตร จงหา
  - 3.1 อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเทียบกับความยาวของด้าน
  - 3.2 อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเทียบกับความยาวของด้านขณะที่ด้านยาว 10 เซนติเมตร
4. ให้  $y = 2x^2 - 3$  จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ  $y$  เทียบกับ  $x$ 
  - 4.1 เมื่อ  $x$  เปลี่ยนจาก 3 ไปเป็น 5
  - 4.2 เมื่อ  $x$  เปลี่ยนจาก 3 ไปเป็น 8
  - 4.3 อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะ  $x = 3$



รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>แบบสรุปเนื้อหา</b>	รหัสแบบสรุปเนื้อหาที่ 3 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 ชั่วโมงที่ 13-17 จำนวนชั่วโมงสอน 5 ชั่วโมง
---	-----------------------	---

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนสรุปเนื้อหาตามเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 3  
ตามหัวข้อต่อไปนี้

1. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ  $y$  เทียบกับ  $x$  ในช่วง  $x$  ถึง  $x + h$  คือ .....  
 .....  
 .....
2. อัตราการเปลี่ยนแปลงของ  $y$  เทียบกับ  $x$  ขณะ  $x$  มีค่าใด ๆ คือ .....  
 .....  
 .....
3. กำหนดให้  $y = x^3 - 3x$  แล้ว อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ  $y$  เทียบกับ  $x$  ในช่วง  $x = 3$  ถึง  $x = 6$  คือ .....
4. จากโจทย์ข้อ 3 อัตราการเปลี่ยนแปลงของ  $y$  เทียบกับ  $x$  ขณะ  $x = 7$  มีค่าเท่ากับ .....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4</b> สัปดาห์ที่ 6 – 8 ชั่วโมงที่ 18 – 22	เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน จำนวนชั่วโมงสอน 5 ชั่วโมง
---	--	---

### จุดประสงค์การเรียนรู้

1. **ด้านความรู้** นักเรียนสามารถ
  - 1.1 บอกความหมายของอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้
  - 1.2 หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้โดยใช้นิยามได้
2. **ด้านทักษะกระบวนการ** นักเรียนมีความสามารถ
  - 2.1 ในการแก้ปัญหา
  - 2.2 ในการให้เหตุผล
  - 2.3 ในการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ
  - 2.4 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์
3. **ด้านคุณลักษณะ** นักเรียน
  - 3.1 มีความรับผิดชอบ
  - 3.2 มีความซื่อสัตย์
  - 3.3 มีความเชื่อมั่นในตนเอง
  - 3.4 มีระเบียบวินัย

### สาระการเรียนรู้

1. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

กิจกรรมการเรียนรู้	
ชั่วโมงที่	กิจกรรมการเรียนรู้ / สื่อการเรียนรู้
18 – 22	<p>1. แจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบว่า เมื่อเรียนจบแผนการเรียนรู้แล้ว นักเรียนจะสามารถ</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- บอกความหมายของอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้</li> <li>- หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้โดยใช้ नियามได้</li> </ul> <p>2. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับอัตราการเปลี่ยนแปลง โดยใช้การถาม – ตอบ</p> <p>3. นักเรียนแต่ละกลุ่มศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 4 แล้วร่วมกันสรุปขั้นตอนการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้ नियาม โดยครูเดินดูรอบ ๆ เพื่อตอบปัญหาเมื่อมีนักเรียนสงสัย หลังจากนั้นบันทึกลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 4</p> <p>4. ครูเขียนโจทย์เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน 2 ข้อ บนกระดาน แล้วให้นักเรียนร่วมกันหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน เพื่อเป็นการตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนอีกครั้งหนึ่ง ดังนี้</p> <p style="text-align: center;">จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>f(x) = 2x^2 - x</math></li> <li>2. <math>f(x) = 3x^2 + 2x - 5</math></li> </ol> <p>5. นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 4 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลยและบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง</p> <p>6. ถ้านักเรียนคนใดทำคะแนนจากการทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 4 ไม่ถึง 70% ครูจะให้นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 4 อีกครั้ง หรือครูสอนเพิ่มเติมนอกเวลาเรียน เพื่อเป็นการช่วยเหลือนักเรียนให้มีพัฒนาการในการเรียนรู้ได้ดีขึ้น ส่วนนักเรียนที่ทำได้คะแนน 70% ขึ้นไป จะได้รับการสอนเสริมพิเศษ (ถ้านักเรียนสนใจ)</p>
	<p><b>สื่อการเรียนรู้</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. เอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 4</li> <li>2. แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 4</li> <li>3. แบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 4</li> </ol> <p><b>แหล่งการเรียนรู้</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์</li> <li>2. ห้องสมุดโรงเรียน</li> <li>3. ห้องสมุดประชาชน</li> <li>4. อินเทอร์เน็ต</li> </ol> <p><b>หลักฐานการเรียนรู้</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 4</li> <li>2. แบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 4</li> </ol>

## การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นักเรียนส่วนใหญ่ตอบคำถามได้ถูกต้อง
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	2. นักเรียนสนใจร่วมกิจกรรมดี
3. การทำแบบฝึกทักษะ	3. นักเรียนส่วนใหญ่ทำได้ถูกต้อง
4. การทำแบบสรุบน้ำ้อหา	4. นักเรียนส่วนใหญ่สรุปเนื้อหาได้ถูกต้อง

## บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

## 1. สรุปผลการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## 2. แนวทางในการแก้ไขและพัฒนา

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## 3. ข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ ..... ครูผู้สอน

(นายวิเชียร กิรติศักดิ์กุล)

ครู วิทยฐานะ ครูชำนาญการพิเศษ

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ. ....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัสเอกสารประกอบการสอนที่ 4 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 ชั่วโมงที่ 18-22 จำนวนชั่วโมงสอน 5 ชั่วโมง
---	--------------------	---

### จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1.1 บอกความหมายของอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้
- 1.2 หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ โดยใช้นิยามได้

### สาระสำคัญ

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน  $f$  ที่  $x$  คือ  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

### สาระการเรียนรู้

#### อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน  $y = f(x)$  ใด ๆ นิยามได้ดังนี้

**บทนิยาม** ถ้า  $y = f(x)$  เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของ

จำนวนจริง และ  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  หาค่าได้ เรียกค่าลิมิตที่ได้นี้ว่า

“อนุพันธ์ของฟังก์ชัน  $f$  ที่  $x$ ” เขียนแทนด้วย  $f'(x)$

จากบทนิยาม จะได้  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  การหา  $f'$  เรียกว่า การหา

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน  $f$  ถ้า  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  หาค่าไม่ได้ เราจะกล่าวว่า ฟังก์ชัน  $f$  ไม่มี

อนุพันธ์ที่  $x$  สัญลักษณ์ที่ใช้แทนอนุพันธ์ของฟังก์ชัน  $f$  ที่  $x$  เช่น  $\frac{dy}{dx}$  (อ่านว่า ดีวายบายดีเอกซ์)

และ  $\frac{d}{dx} f(x)$  เป็นต้น

**หมายเหตุ** 1.  $\frac{dy}{dx} \neq \frac{x}{y}$  เพราะ  $\frac{dy}{dx}$  คือ อนุพันธ์ของฟังก์ชัน  $f$  ที่  $x$  ไม่ได้

หมายถึง  $d$  คุณ  $y$  หารด้วย  $d$  คุณ  $x$

2.  $\frac{dy}{dx}$  คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ  $y$  เทียบกับ  $x$  ขณะ  $x$  มีค่าใด ๆ

3. เมื่อ  $S$  แทนระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ในเวลา  $t$  หรือ  $S = f(t)$

ถ้า  $v$  คือความเร็วขณะเวลา  $t$  ใด ๆ

$$\text{จะได้ } v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

$$\therefore S' = f'(t) = \frac{ds}{dt} = v$$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด  $f(x) = 5 - 3x + x^2$  จงหา  $f'(x)$

วิธีทำ จาก

$$f(x) = 5 - 3x + x^2$$

$$f(x+h) = 5 - 3(x+h) + (x+h)^2$$

$$= 5 - 3x + 3h + x^2 - 2hx + h^2$$

$$f(x+h) - f(x) = -3h + 2hx + h^2$$

$$= h(h + 2x - 3)$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = h + 2x - 3$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2x - 3)$$

$$\therefore f'(x) = 2x - 3$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด  $f(x) = 2x^2$  จงหา  $f'(x)$

วิธีทำ

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^2 - 2x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4xh + h^2 - 2x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (4x + 2h)$$

$$= 4x$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 3 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน  $f(x) = x^3 + 2x^2$  ณ จุดที่  $x = -2$

วิธีทำ จาก

$$f(x) = x^3 + 2x^2$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 + 2(x+h)^2 - (x^3 + 2x^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 4hx + 2h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2 + 4x + 2h)$$

$$= 3x^2 + 4x$$

$$f'(-2) = 3(-2)^2 + 4(-2)$$

$$= 12 - 8$$

$$\therefore f'(-2) = 4$$

ตอบ



สรุป

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 แทนค่า  $x$  ด้วย  $x+h$  ใน  $f(x)$

ขั้นที่ 2 หา  $f(x+h) - f(x)$

ขั้นที่ 3 หาร  $f(x+h) - f(x)$  ด้วย  $h$

ขั้นที่ 4 หา  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>แบบฝึกทักษะ</b>	รหัสแบบฝึกทักษะที่ 4 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 ชั่วโมงที่ 18-22 จำนวนชั่วโมงสอน 5 ชั่วโมง
---	--------------------	--

**แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ข้อที่ 1.1 – 1.2**

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนเติมคำตอบของแต่ละข้อต่อไปนี้ลงในตารางให้สมบูรณ์

ข้อที่	คำถาม	คำตอบ
1	จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ 1.1 $f(x) = 2x^2 - x$ 1.2 $f(x) = 3x^2 - 6x + 7$ 1.3 $f(x) = 5x^3 - 6x$ 1.4 $f(x) = x^2 + 2x - 3$ 1.5 $f(x) = x^4$	1.1 ..... 1.2 ..... 1.3 ..... 1.4 ..... 1.5 .....
2	จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ ณ จุดที่กำหนดให้ 2.1 $f(x) = x^3 + x + 1$ ที่ $x = 1$ 2.1 $f(x) = x^2(x + 2)$ ที่ $x = -2$ 2.1 $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$ ที่ $x = 2$	2.1 ..... 2.2 ..... 2.3 .....

คะแนนที่ได้ .....

ผู้ตรวจ .....

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ.....

ชื่อ .....

นามสกุล .....

ชั้น ..... เลขที่ .....

### เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 4

1) 1.1  $4x - 1$

1.2  $6x^2 - 6$

1.3  $15x^2 - 6$

1.4  $2x + 2$

1.5  $4x^3$

2) 2.1  $f'(1) = 4$

2.2  $f'(-2) = 20$

2.3  $f'(2) = 5$





รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5 สัปดาห์ที่ 8 – 9 ชั่วโมงที่ 23 – 27	เรื่อง ความชันของเส้นโค้ง จำนวนชั่วโมงสอน 5 ชั่วโมง
---	---	--

### จุดประสงค์การเรียนรู้

1. ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ
  - 1.1 บอกความหมายของเส้นสัมผัสเส้นโค้งได้
  - 1.2 บอกความหมายของความชันของเส้นโค้งได้
  - 1.3 หาความชันของเส้นโค้งและสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดที่กำหนดให้ได้
2. ด้านทักษะกระบวนการ นักเรียนมีความสามารถ
  - 2.1 ในการแก้ปัญหา
  - 2.2 ในการให้เหตุผล
  - 2.3 ในการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ
  - 2.4 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์
3. ด้านคุณลักษณะ นักเรียน
  - 3.1 มีความรับผิดชอบ
  - 3.2 มีความซื่อสัตย์
  - 3.3 มีความเชื่อมั่นในตนเอง
  - 3.4 มีระเบียบวินัย

### สาระการเรียนรู้

1. ความชันของเส้นโค้ง

## กิจกรรมการเรียนรู้

ชั่วโมงที่	กิจกรรมการเรียนรู้ / สื่อการเรียนรู้
23-24	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. แจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบว่า เมื่อเรียนจบแผนการเรียนรู้แล้วนักเรียนจะสามารถ               <ul style="list-style-type: none"> <li>- บอกความหมายของเส้นสัมผัสเส้นโค้งได้</li> <li>- บอกความหมายของความชันของเส้นโค้งได้</li> <li>- หาความชันของเส้นโค้ง และสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดที่กำหนดให้ได้</li> </ul> </li> <li>2. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้นิยาม และความชันของเส้นตรง โดยใช้การถาม – ตอบ</li> <li>3. นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 5.1 แล้วร่วมกันสรุปความหมายความชันของเส้นโค้ง โดยมีครูคอยช่วยเหลือแนะนำ และอธิบายเพิ่มเติมเมื่อนักเรียนมีข้อสงสัย หลังจากนั้นให้บันทึกลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 5</li> <li>4. นักเรียนแต่ละกลุ่มแข่งขันกันทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 5.1 ข้อ 1 – ข้อ 3 กลุ่มใดทำเสร็จก่อนและถูกต้องเป็นผู้ชนะ โดยใช้เวลา 15 นาที</li> <li>5. ครูชมเชยนักเรียนที่ตั้งใจและร่วมกิจกรรมเป็นอย่างดี เพื่อเป็นการเสริมแรงในการเรียนรู้ของนักเรียน</li> <li>6. นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 5.1 ข้อ 4 – ข้อ 8 เป็นการบ้าน เพื่อเสริมทักษะ และความแม่นยำในการเรียนรู้</li> </ol>
25 - 27	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 5.1 โดยครูให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจ และบันทึกคะแนนที่ได้ไว้</li> <li>2. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับความหมายของเส้นสัมผัสเส้นโค้งและความชันของเส้นโค้ง โดยใช้การถาม – ตอบ</li> <li>3. นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 5.2 แล้วร่วมกันอภิปรายกลุ่มย่อย เกี่ยวกับวิธีการหาความชันของเส้นโค้งและสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง โดยครูคอยแก้ไขเพิ่มเติมให้ถูกต้อง หลังจากนั้นบันทึกลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 5</li> <li>4. นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 5.2 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลย และบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง</li> <li>5. นักเรียนแต่ละกลุ่มจัดทำสมุดเล่มเล็กคณิตศาสตร์ เรื่องความชันของเส้นโค้ง ส่งครูผู้สอนนอกเวลาเรียน</li> </ol>

## สื่อการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการเรียนรู้ รหัสที่ 5.1 – 5.2
2. แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 5.1 – 5.2
3. แบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 5

## แหล่งการเรียนรู้

1. ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
2. ห้องสมุดโรงเรียน
3. ห้องสมุดประชาชน

## หลักฐานการเรียนรู้

1. แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 5.1 – 5.2
  2. แบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 5
  3. สมุดเล่มเล็กคณิตศาสตร์เรื่อง ความชันของเส้นโค้ง
1. เอกสารประกอบการเรียนรู้ รหัสที่ 5.1 – 5.2
  2. แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 5.1 – 5.2
  3. แบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 5

## การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นักเรียนส่วนใหญ่ตอบคำถามได้ถูกต้อง
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	2. นักเรียนสนใจร่วมกิจกรรมดี
3. การทำแบบฝึกทักษะ	3. นักเรียนส่วนใหญ่ทำได้ถูกต้อง
4. การทำแบบสรุปเนื้อหา	4. นักเรียนส่วนใหญ่สรุปเนื้อหาได้ถูกต้อง
5. การทำสมุดเล่มเล็กคณิตศาสตร์	5. นักเรียนส่วนใหญ่ทำได้ถูกต้อง สวยงาม และตรงต่อเวลา

## บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

### 1. สรุปผลการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### 2. แนวทางในการแก้ไขและพัฒนา

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### 3. ข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ ..... ครูผู้สอน

(นายวิเชียร กীরติศักดิ์กุล)

ครู วิทยฐานะ ครูชำนาญการพิเศษ

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ. ....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>เอกสารประกอบการสอน</b>	รหัสเอกสารประกอบการสอนที่ 5.1 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5 ชั่วโมงที่ 24 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
---	---------------------------	--

### จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1.1 บอกความหมายของเส้นสัมผัสเส้นโค้งได้
- 1.2 บอกความหมายของความชันของเส้นโค้งได้

### สาระสำคัญ

การหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด  $P(x, y)$  ใด ๆ คือ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน  $f$  ที่  $x$  ซึ่งมีประโยชน์ในการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

### สาระการเรียนรู้

#### ความชันของเส้นโค้งและความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง

การหาความชันของเส้นโค้งและความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง สามารถหาได้จากนิยามต่อไปนี้

**บทนิยาม** ถ้า  $y = f(x)$  เป็นสมการของเส้นโค้งแล้ว เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด  $P(x, y)$  ใด ๆ จะเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด  $P$  และมีค่าความชันเท่ากับ

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

**บทนิยาม** ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด  $P(x, y)$  ใด ๆ บนเส้นโค้ง หมายถึง ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด  $P$

ตัวอย่างที่ 1 ถ้า  $f(x) = 5x^2 - 6$  เป็นสมการเส้นโค้ง จงหาความชันของเส้นโค้ง  
ที่จุด  $(3, 12)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } f(x) &= 5x^2 - 6 \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[5(x+h)^2 - 6] - (5x^2 - 6)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 10hx + 5h^2 - 6 - 5x^2 + 6}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (10x + 5h) \\ &= 10x \end{aligned}$$

$$\text{ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด } (x, y) \text{ ใด ๆ} = 10x$$

$$\therefore \text{ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด } (3, 12) = 10(3) = 30 \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 2 ให้  $f(x) = 3x - x^2$  จงหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด  $(4, 6)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } f(x) &= 3x - x^2 \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3(x+h) - (x+h)^2] - (3x - x^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x + 3h - x^2 - 2hx - h^2 - 3x + x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3 - 2x - h) \\ &= 3 - 2x \end{aligned}$$

$$\text{ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด } (x, y) \text{ ใด ๆ} = 3 - 2x$$

$$\therefore \text{ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด } (4, 6) = 3 - 2(4) = 5 \quad \text{ตอบ}$$

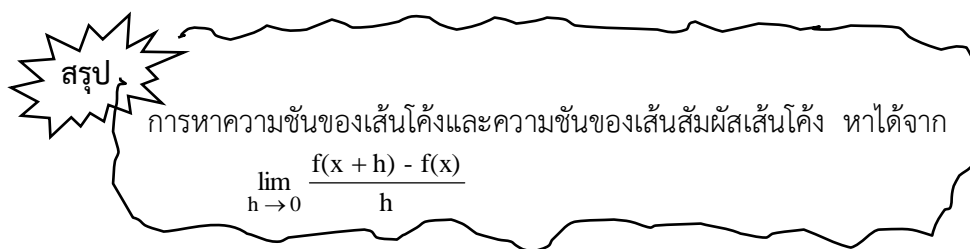
ตัวอย่างที่ 3 ให้  $y = x^3$  เป็นสมการเส้นโค้ง จงหาความชันของเส้นโค้งที่จุด  $(10, 20)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } y &= x^3 \\ \therefore f(x) &= x^3 \\ \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2 \end{aligned}$$

$$\text{ความชันของเส้นโค้งที่จุด } (x, y) \text{ ใด ๆ} = 3x^2$$

$$\text{ความชันของเส้นโค้งที่จุด } (10, 20) = 3(10)^2$$

$$= 300$$



รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบฝึกทักษะ	รหัสแบบฝึกทักษะที่ 5.1 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5 ชั่วโมงที่ 24 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
---	-------------	---

### แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ข้อที่ 1.1 - 1.2

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบแต่ละข้อลงในตารางให้ถูกต้องสมบูรณ์

ข้อที่	คำถาม	คำตอบ
1	ให้ $f(x) = x^2 - 4x$ เป็นสมการของเส้นโค้ง จงหาความชันของเส้นโค้งที่จุด $(6, 3)$	
2	ให้ $f(x) = 3x - 2x^2$ เป็นสมการของเส้นโค้ง จงหาความชันของเส้นโค้งที่จุด $(1, 3)$	
3	ถ้า $f(x) = 2x^2 - 10$ เป็นสมการของเส้นโค้ง จงหาความชันของเส้นโค้งที่จุด $(2, 4)$	
4	ถ้า $f(x) = 6x^2 - 1$ เป็นสมการของเส้นโค้ง จงหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(2, 5)$	
5	ให้ $f(x) = 4x^3$ เป็นสมการของเส้นโค้ง จงหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(7, 3)$	
6	ให้ $y = x^2 - x + 5$ เป็นสมการของเส้นโค้ง จงหาความชันของเส้นโค้งที่จุด $(5, 4)$	
7	ให้ $f(x) = x^3 + 2x$ เป็นสมการของเส้นโค้ง จงหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(6, -8)$	
8	ให้ $f(x) = x^3 - x^2$ เป็นสมการของเส้นโค้ง จงหาความชันของเส้นโค้งที่จุด $(12, 8)$	

คะแนนที่ได้ .....

ผู้ตรวจ .....

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ.....

ชื่อ .....

นามสกุล .....

ชั้น ..... เลขที่ .....



เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 5.1

- 1) 8
- 2) -1
- 3) 8
- 4) 24
- 5) 588
- 6) 8
- 7) 110
- 8) 408

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>เอกสารประกอบการสอน</b>	รหัสเอกสารประกอบการสอนที่ 5.2 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5 ชั่วโมงที่ 25-27 จำนวนชั่วโมงสอน 3 ชั่วโมง
---	---------------------------	---

### จุดประสงค์การเรียนรู้

1.3 หาความชันของเส้นโค้งและสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดที่กำหนดให้

### สาระสำคัญ

เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด  $(x, y)$  ใด ๆ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด  $(x, y)$  และมีความชันเท่ากับ ความชันของเส้นโค้งที่จุด  $(x, y)$  จะมีสมการคือ  $y - y_1 = m(x - x_1)$  เมื่อ  $m$  คือความชันของเส้นตรง

### สาระการเรียนรู้

#### สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง

สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด  $(x, y)$  ใด คือ  $y - y_1 = m(x - x_1)$  เมื่อ  $m$  คือ ความชันของเส้นตรง ซึ่งสามารถหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่างที่ 1** ถ้า  $y = x^2 - x$  เป็นสมการของเส้นโค้ง จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด  $(2, 2)$

**วิธีทำ** จาก  $y = x^2 - x$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= x^2 - x \\ \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^2 - (x+h)] - (x^2 - x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x - h - x^2 + x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h - 1) \\ &= 2x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด } (2, 2) &= (2 \times 2) - 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด  $(x_1, y_1)$  และมีความชันเท่ากับ  $m$  คือ  $y - y_1 = m(x - x_1)$   
 เนื่องจากเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด  $(2, 2)$  เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด  $(2, 2)$  และมีความชันเท่ากับ 3

$$\begin{aligned} \therefore \text{สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง คือ} \quad y - 2 &= 3(x - 2) \\ y - 2 &= 3x - 6 \\ 3x - y - 4 &= 0 \end{aligned} \quad \text{ตอบ}$$

**ตัวอย่างที่ 2** ถ้า  $y = x - 3x^2$  เป็นสมการของเส้นโค้ง จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด  $(3, -3)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \text{จาก} \quad y &= x - 3x^2 \\ \text{หรือ} \quad f(x) &= x - 3x^2 \\ \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h) - 3(x+h)^2] - (x - 3x^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h - 3x^2 - 6xh - 3h^2 - x + 3x^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (1 - 6x - 3h) \\ &= 1 - 6x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด } (3, -3) &= 1 - 6(3) \\ &= -17 \end{aligned}$$

สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด  $(x_1, y_1)$  และมีความชันเท่ากับ  $m$  คือ  $y - y_1 = m(x - x_1)$   
 เนื่องจากเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด  $(3, -3)$  เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด  $(3, -3)$  และมีความชันเท่ากับ -17

$$\begin{aligned} \therefore \text{สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง คือ} \quad y - (-3) &= -17(x - 3) \\ y + 3 &= -17x + 51 \\ 17x + y - 48 &= 0 \end{aligned} \quad \text{ตอบ}$$

**ตัวอย่างที่ 3** จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง  $y = x^3 - 2x^2 + 4$  ที่จุด ซึ่ง  $x = 2$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \text{จาก} \quad y &= x^3 - 2x^2 + 4 \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^3 - 2(x+h)^2 + 4] - [x^3 - 2x^2 + 4]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2x^2 - 2xh - h^2 + 4 - x^3 + 2x^2 - 4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 4x - 2h) \\ &= 3x^2 - 4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด } (x, y) \text{ ใดๆ} &= 3x^2 - 4x \\ \text{ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด } x = 2, &\text{ เท่ากับ } 3(2^2) - 4(2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\text{เมื่อ } x = 2 \text{ จะได้ } y = 2^3 - 2(2^2) + 4 = 4$$

$\therefore$  จุดสัมผัสเส้นโค้ง คือ จุด  $(2, 4)$

$$\text{สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง คือ } y - 4 = 4(x - 2)$$

$$y - 4 = 4x - 8$$

$$4x - y - 4 = 0$$

ตอบ

สรุป

การหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง มีขั้นตอนดังนี้

- 1) หา  $\frac{dy}{dx}$  ซึ่งเท่ากับความชันของเส้นโค้ง
- 2) หาจุดสัมผัสเส้นโค้ง คือจุด  $(x, y)$
- 3) หาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งจากสูตร

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>แบบฝึกทักษะ</b>	รหัสแบบฝึกทักษะที่ 5.2 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5 ชั่วโมงที่ 25-27 จำนวนชั่วโมงสอน 3 ชั่วโมง
---	--------------------	--

### แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ข้อที่ 1.3

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบแต่ละข้อต่อไปนี้ลงในตารางให้ถูกต้องสมบูรณ์

ข้อที่	คำถาม	คำตอบ
1	จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2 - 2x$ ที่จุด $(-1, 3)$	
2	จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = 4x^2 + 2x - 6$ ที่จุด $(6, 4)$	
3	จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3 - 2x^2 + 4$ ที่จุด $(2, 4)$	
4	จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2 - 2x + 1$ ที่จุด $(2, 1)$	
5	จงหาสมการของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = 2x + 3\sqrt{x}$ ที่จุด $x = 4$	
6	ถ้า A เป็นจุดอยู่บนเส้นโค้ง $y = 2x^2 + 1$ และเส้นสัมผัสที่จุด A ขนานกับเส้นตรง $y + 4x = 0$ จงหาสมการของเส้นตรงซึ่งผ่านจุด A และตั้งฉากกับเส้นสัมผัส	

คะแนนที่ได้ .....

ผู้ตรวจ .....

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ.....

ชื่อ .....

นามสกุล .....

ชั้น ..... เลขที่ .....

เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 5.2

- 1)  $4x + y + 1 = 0$
- 2)  $5x - y - 296 = 0$
- 3)  $4x - y - 4 = 0$
- 4)  $2x - y - 3 = 0$
- 5)  $4x + 11y - 170 = 0$
- 6)  $x - 4y + 13 = 0$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม	รหัสแบบสรุปเนื้อหาที่ 5
รหัสวิชา ค33202	ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5
ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	ชั่วโมงที่ 25-27 จำนวนชั่วโมงสอน 3 ชั่วโมง

คำชี้แจง ให้นักเรียนสรุปเนื้อหาตามเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 5.1 – 5.2  
ตามหัวข้อต่อไปนี้

### แบบสรุปเนื้อหา

- ถ้า  $y = f(x)$  เป็นสมการของเส้นโค้ง แล้วเส้นโค้งสัมผัสเส้นโค้งที่จุด  $P(x, y)$  ใด ๆ จะเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด  $P$  จะมีความชันเท่ากับ .....
- ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด  $P(x, y)$  ใด ๆ คือ .....
- การหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง มีขั้นตอนดังนี้ .....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6</b> สัปดาห์ที่ 10 – 12 ชั่วโมงที่ 28 – 35	เรื่อง การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยใช้สูตร จำนวนชั่วโมงสอน 8 ชั่วโมง
---	--	--

### จุดประสงค์การเรียนรู้

1. **ด้านความรู้** นักเรียนสามารถ
  - 1.1 บอกสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้
  - 1.2 พิสูจน์สูตรบางสูตรของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้
  - 1.3 หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้โดยใช้สูตรได้
  - 1.4 นำความรู้เรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตรไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้
2. **ด้านทักษะกระบวนการ** นักเรียนมีความสามารถ
  - 2.1 ในการแก้ปัญหา
  - 2.2 ในการให้เหตุผล
  - 2.3 ในการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ
  - 2.4 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์
3. **ด้านคุณลักษณะ** นักเรียน
  - 3.1 มีความรับผิดชอบ
  - 3.2 มีความซื่อสัตย์
  - 3.3 มีความเชื่อมั่นในตนเอง
  - 3.4 มีระเบียบวินัย

### สาระการเรียนรู้

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร



## กิจกรรมการเรียนรู้

ชั่วโมงที่	กิจกรรมการเรียนรู้ / สื่อการเรียนรู้
28 -29	<p>1. แจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบว่า เมื่อเรียนจบแผนการเรียนรู้แล้ว นักเรียนจะสามารถ</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- บอกสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้</li> <li>- พิสูจน์สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้</li> <li>- หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้โดยใช้สูตรได้</li> <li>- นำความรู้เรื่อง การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตรไปใช้ในการแก้ปัญหา โจทย์ได้</li> </ul> <p>2. ครูซักถามปัญหาเกี่ยวกับการจัดทำสมุดเล่มเล็กคณิตศาสตร์ เรื่องความชันของเส้นโค้ง ว่ามีปัญหาอะไรบ้าง โดยครูและนักเรียนแสดงความคิดเห็นร่วมกันและให้นักเรียนดูตัวอย่างสมุดเล่มเล็กคณิตศาสตร์ประกอบ</p> <p>3. ครูเฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 5.2 ข้อที่นักเรียนทำผิดมากที่สุด เพื่อให้ นักเรียนรู้ข้อบกพร่องและนำไปแก้ไขปรับปรุง เพื่อให้เกิดการเรียนรู้ที่ถูกต้อง</p> <p>4. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับความชันของเส้นโค้ง โดยใช้การถาม-ตอบ</p> <p>5. นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบ รหัสที่ 6.1 โดยศึกษาตัวอย่างและเนื้อหาและ ตัวอย่างให้ละเอียด แล้วร่วมกันสรุปวิธีการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร โดยครู คอยอธิบายเพิ่มเติม ถ้ามีนักเรียนสงสัย หลังจากนั้นให้บันทึกลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 6</p> <p>6. นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 6.2 เป็นการบ้านเพื่อเสริมทักษะและความ มั่นยำในการเรียนรู้</p>
	<p>1. นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 6.2 แล้ว อภิปรายร่วมกัน เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตรที่ 4 – 6 โดยครูเดินดูรอบ ๆ คอยตอบ ข้อสงสัยของนักเรียน หลังจากนั้นให้บันทึกสูตรลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 6</p> <p>2. นักเรียนแต่ละกลุ่มส่งตัวแทนกลุ่มละ 1 คน ออกมาหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตรที่ 4 – 6 เพื่อเป็นการตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน ดังนี้</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. ให้ <math>y = x^3 + 2x^2</math> จงหา <math>\frac{dy}{dx}</math></li> <li>2. ให้ <math>f(x) = 2x^6 + 3x^2 + 3x</math> จงหา <math>f'(x)</math></li> <li>3. ให้ <math>f(x) = x^3 - 4x^2</math> จงหา <math>f'(x)</math></li> <li>4. ให้ <math>f(x) = 2x^3 - 4x + 5</math> จงหา <math>\frac{dy}{dx}</math></li> </ol> <p>3. นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 6.2 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลย และบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง</p> <p>4. นักเรียนแต่ละกลุ่มจัดทำการ์ตูนคณิตศาสตร์ เรื่อง การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยใช้สูตรที่ 4 – 6 เป็นผลงานของกลุ่ม ส่งครูผู้สอนนอกเวลาเรียน</p>

ชั่วโมงที่	กิจกรรมการเรียนรู้ / สื่อการเรียนรู้
33 - 34	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. ครูเฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 6.2 ข้อที่นักเรียนทำผิดมากที่สุด เพื่อให้ นักเรียนได้เห็นข้อบกพร่องของตนเองและทำความเข้าใจได้ถูกต้องยิ่งขึ้น</li> <li>2. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตรที่ 4 – 6 โดยใช้ การถาม – ตอบ</li> <li>3. นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 6.3 แล้วร่วมกันสรุปวิธีการหา อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตรที่ 7 – 8 โดยครูกอยอธิบายเพิ่มเติมเมื่อนักเรียนสงสัย หลังจากนั้นให้บันทึกสูตรที่ 7 – 8 ลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 6</li> <li>4. ครูเขียนโจทย์เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตรที่ 7 – 8 จำนวน 2 ข้อ สบนกระดาน แล้วให้นักเรียนช่วยกันหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน เพื่อเป็นการตรวจสอบ ความเข้าใจของนักเรียน</li> <li>5. ครูชมเชยนักเรียนที่สนใจร่วมกิจกรรมเป็นอย่างดี และหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้ ถูกต้อง</li> <li>6. นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 6.3 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลย และบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง</li> <li>7. นักเรียนแต่ละกลุ่มเตรียมส่งตัวแทนเข้าร่วมแข่งขันตอบปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ เรื่อง การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร กลุ่มละ 2 คน ในชั่วโมงหน้า</li> </ol>
35	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. นักเรียนทำการแข่งขันโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์หน้าชั้นเรียน ใช้เวลา 15 นาที เมื่อทำเสร็จตัวแทนกลุ่มนำส่งครูผู้สอน แล้วกลับไปนั่งตามเดิม</li> <li>2. นักเรียนแต่ละกลุ่มส่งตัวแทนมาตรวจให้คะแนนการแข่งขันตามแผนภูมิเฉลยที่ครู แจกให้ แล้วบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ หลังจากนั้นครูผู้สอนตรวจสอบและประกาศผลการ แข่งขัน ผู้ชนะอันดับ 1, 2 และ 3 และมอบรางวัล หรือให้คำยกย่องชมเชย เพื่อเป็น การเสริมแรงของนักเรียน</li> <li>3. ครูชมเชยนักเรียนที่ให้ความสนใจในการแข่งขันเป็นอย่างดี และทบทวนความรู้ เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์โดยใช้สูตร โดยใช้การถาม – ตอบ</li> <li>4. นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 6.4 แล้วร่วมกันสรุปขั้นตอนใน การแก้โจทย์ปัญหาการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร โดยครูกอยแนะนำเพิ่มเติม (ถ้ามี) แล้วบันทึกลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 6</li> <li>5. นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 6.4 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลย และบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง</li> <li>6. นักเรียนแต่ละกลุ่มจัดทำแผนภูมิเกี่ยวกับสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดย ตกแต่งให้สวยงามเป็นผลงานของกลุ่ม ส่งครูผู้สอนนอกเวลาเรียน</li> </ol>

## สื่อการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 6.1 – 6.4
2. แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 6.1 – 6.4
3. แบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 6

## แหล่งการเรียนรู้

1. ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
2. ห้องสมุดโรงเรียน
3. ห้องสมุดประชาชน

## หลักฐานการเรียนรู้

1. แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 6.1 – 6.4
2. แบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 6
3. การ์ตูนคณิตศาสตร์
4. แผนภูมิ สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

## การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นักเรียนส่วนใหญ่ตอบคำถามได้ถูกต้อง
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	2. นักเรียนสนใจร่วมกิจกรรมดี
3. การทำแบบฝึกทักษะ	3. นักเรียนส่วนใหญ่ทำได้ถูกต้อง
4. การทำแบบสรุปเนื้อหา	4. นักเรียนส่วนใหญ่สรุปเนื้อหาได้ถูกต้อง
5. การทำการ์ตูนคณิตศาสตร์	5. นักเรียนส่วนใหญ่ทำได้ถูกต้องและสวยงาม
6. การทำแผนภูมิ	6. นักเรียนส่วนใหญ่ทำได้ถูกต้อง สวยงาม มีความรับผิดชอบดี

## บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

### 1. สรุปผลการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### 2. แนวทางในการแก้ไขและพัฒนา

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### 3. ข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ ..... ครูผู้สอน

(นายวิเชียร กীরติศักดิ์กุล)

ครู วิทยฐานะ ครูชำนาญการพิเศษ

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ. ....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัสเอกสารประกอบการสอนที่ 6.1 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6 ชั่วโมงที่ 28 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
---	--------------------	--

### จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1.1 บอกสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้
- 1.2 พิสูจน์สูตรบางสูตรของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้
- 1.3 หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้โดยใช้สูตรได้

### สาระสำคัญ

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันมีวิธีการหาอีกอย่างหนึ่งนอกจากการหาอนุพันธ์โดยใช้นิยาม ก็คือ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้สะดวกและรวดเร็วยิ่งขึ้น

### สาระการเรียนรู้

#### การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร ในเอกสารชุดนี้มีสูตร ดังนี้

$$\text{สูตรที่ 1 ถ้า } y = c \text{ เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัวแล้ว } \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\text{นั่นคือ } \frac{d}{dx}(c) = 0$$

พิสูจน์ จาก  $f(x) = 0$

จะได้  $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้  $y = -8$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} (-8) \\ &= 0 \end{aligned}$$


---

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้  $y = 81$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} (81) \\ &= 0 \end{aligned}$$


---

สูตรที่ 2 ถ้า  $y = x$  แล้ว  $\frac{dy}{dx} = 1$

$$\text{นั่นคือ} \quad \frac{dx}{dx} = 1$$

พิสูจน์ ให้  $f(x) = x$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

ข้อสังเกต

$\frac{dx}{dx} = 1$  หมายถึงอนุพันธ์ของฟังก์ชัน  $y$  เทียบกับ  $x$  ที่  $x$  ใด ๆ เท่ากับ 1

สูตรที่ 3 ถ้า  $y = x^n$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนจริงแล้ว  $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$   
 นั่นคือ  $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้  $f(x) = x^6$  จงหาค่าของ  $f'(x)$

วิธีทำ  $f'(x) = \frac{d}{dx}(x^6)$   
 $= 6x^{6-1}$   
 $= 6x^5$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้  $y = \frac{1}{x^4}$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก  $y = \frac{1}{x^4}$   
 $= x^{-4}$   
 $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{-4})$   
 $= -4x^{-4-1}$   
 $= -4x^{-5}$   
 $= -\frac{4}{x^5}$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้  $y = \sqrt[4]{x}$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ  $\therefore \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$   
 $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{4}})$   
 $= \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1}$   
 $= \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$   
 $= \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

ตอบ

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>แบบฝึกทักษะ</b>	รหัสแบบฝึกทักษะที่ 6.1 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6 ชั่วโมงที่ 28 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
---	--------------------	---

### แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ข้อที่ 1.3

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบแต่ละข้อต่อไปนี้ลงในตารางให้ถูกต้อง

ข้อที่	คำถาม	คำตอบ
1	ถ้า $y = -10$ แล้ว จงหา $\frac{dy}{dx}$	
2	ถ้า $f(x) = 20$ แล้ว จงหา $f'(x)$	
3	ถ้า $f(x) = 4^3$ แล้ว จงหา $f'(x)$	
4	ถ้า $y = 25$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ มีค่าเท่าใด	
5	ถ้า $y = x^4$ แล้ว จงหา $\frac{dy}{dx}$	
6	ถ้า $y = \sqrt[3]{x}$ แล้ว จงหา $\frac{dy}{dx}$	
7	ถ้า $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ แล้ว จงหา $f'(x)$	
8	ถ้า $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ แล้ว จงหา $f'(x)$	
9	ถ้า $y = x^{\frac{5}{4}}$ แล้ว จงหา $\frac{dy}{dx}$	
10	ถ้า $f(x) = x^8$ แล้ว จงหา $f'(x)$	

คะแนนที่ได้ .....

ผู้ตรวจ .....

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ.....

ชื่อ .....

นามสกุล .....

ชั้น ..... เลขที่ .....



เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 6.1

1. 0
2. 0
3. 0
4. 0
5.  $4x^3$
6.  $\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$
7.  $\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$
8.  $\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$
9.  $\frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}$
10.  $8x^7$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัสเอกสารประกอบการสอนที่ 6.2 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6 ชั่วโมงที่ 30-32 จำนวนชั่วโมงสอน 3 ชั่วโมง
---	--------------------	---

### จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1.1 บอกสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้
- 1.2 หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้โดยใช้สูตรได้

### สาระสำคัญ

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันมีวิธีการอีกอย่างหนึ่งนอกจากการหาอนุพันธ์โดยใช้นิยามก็คือ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้สะดวกและรวดเร็วยิ่งขึ้น

### สาระการเรียนรู้

#### การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร (ต่อ)

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร ในเอกสารชุดนี้มีสูตร ดังนี้

$$\text{สูตรที่ 4 ถ้า } y = f(x) + g(x) \text{ แล้ว}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x)$$

จากสูตรที่ 4 จะได้ว่า อนุพันธ์ของผลบวกของฟังก์ชันเท่ากับผลบวกของอนุพันธ์

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้  $y = x^6 + 7$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก  $y = x^6 + 7$

จะได้ 
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} (x^6) + \frac{d}{dx} (7) \\ &= 6x^{6-1} + 0 \\ &= 6x^5 \end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้  $y = x^4 + x^2$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก  $y = x^4 + x^2$   
 จะได้  $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4) + \frac{d}{dx}(x^2)$   
 $= 4x^{4-1} + 2x^{2-1}$   
 $= 4x^3 + 2x$

ตอบ

สูตรที่ 5 ถ้า  $y = f(x) - g(x)$  แล้ว  
 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) - \frac{d}{dx} g(x)$

จากสูตรที่ 5 จะได้ว่า อนุพันธ์ของผลต่างของฟังก์ชันเท่ากับผลต่างของอนุพันธ์

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้  $f(x) = x^3 - x^2$  จงหา  $f'(x)$

วิธีทำ จาก  $f(x) = x^3 - x^2$   
 $f'(x) = \frac{d}{dx}(x^3) - \frac{d}{dx}(x^2)$   
 $= 3x^{3-1} - 2x^{2-1}$   
 $= 3x^2 - 2x$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้  $y = x^5 - x^3 - x^2$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก  $y = x^5 - x^3 - x^2$   
 จะได้  $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^5) - \frac{d}{dx}(x^3) - \frac{d}{dx}(x^2)$   
 $= 5x^{5-1} - 3x^{3-1} - 2x^{2-1}$   
 $= 5x^4 - 3x^2 - 2x$

ตอบ

สูตรที่ 6 ถ้า  $y = cf(x)$  เมื่อ  $c$  เป็นค่าคงตัว แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = c \frac{d}{dx} f(x)$$

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้  $y = 5x^2 - 3x$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$  และ  $f'(2)$

วิธีทำ จาก  $y = 5x^2 - 3x$   
 จะได้  $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (5x^2 - 3x)$   
 $= 5 \frac{d}{dx} (x^2) - 3 \frac{dx}{dx}$   
 $= 5(2x) - 3(1)$   
 จาก  $\frac{dy}{dx} = 10x - 3$   
 $\therefore f'(x) = 10x - 3$   
 $f'(2) = 10(2) - 3$   
 $= 17$

---

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบฝึกทักษะ	รหัสแบบฝึกทักษะที่ 6.2 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6 ชั่วโมงที่ 33-34 จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
---	-------------	--

### แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ข้อที่ 1.3

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบแต่ละข้อลงในตารางต่อไปนี้ให้ถูกต้อง

ข้อที่	คำถาม	คำตอบ
1	ถ้า $y = x^3 + 25$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	
2	ถ้า $y = x^5 + x^4 + x + 2$ แล้ว จงหา $\frac{dy}{dx}$	
3	ถ้า $f(x) = x^6 - x^3 - 10$ แล้ว จงหา $f'(x)$	
4	ถ้า $f(x) = x^5 + x^4 - x^3 + 5$ แล้ว จงหา $f'(x)$	
5	ถ้า $y = 3x^4$ แล้ว จงหา $\frac{dy}{dx}$	
6	ถ้า $y = 6x^5 + 2x + 12$ แล้ว จงหา $\frac{dy}{dx}$	
7	ถ้า $f(x) = 7x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 10x + 2$ แล้ว จงหา $f'(x)$	
8	ถ้า $f(x) = 2x^6 - 3x^5 + 4x - 3$ แล้ว จงหา $f'(x)$	

คะแนนที่ได้ .....

ผู้ตรวจ .....

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ.....

ชื่อ .....

นามสกุล .....

ชั้น ..... เลขที่ .....

เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 6.2

- 1)  $3x^2$
- 2)  $5x^4 + 4x^3 + 1$
- 3)  $6x^5 - 3x^2$
- 4)  $5x^4 + 4x^3 - 3x^2$
- 5)  $12x^3$
- 6)  $30x^4 + 2$
- 7)  $28x^3 - 24x^2 + 10x - 10$
- 8)  $12x^5 - 15x^4 + 4$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัสเอกสารประกอบการสอนที่ 6.3 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6 ชั่วโมงที่ 33-34 จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
---	--------------------	---

### จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1.1 บอกสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้
- 1.3 หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้โดยใช้สูตรได้

### สาระสำคัญ

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันมีวิธีการหาอีกอย่างหนึ่งนอกจากการหาอนุพันธ์โดยใช้นิยามก็คือ การหาโดยใช้สูตร ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้สะดวกและรวดเร็วยิ่งขึ้น

### สาระการเรียนรู้

### การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร (ต่อ)

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร ในเอกสารชุดนี้มีสูตรดังนี้

$$\text{สูตรที่ 7 ถ้า } y = f(x) \cdot g(x) \text{ แล้ว}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \frac{d}{dx} g(x) + g(x) \frac{d}{dx} f(x)$$

จากสูตรที่ 7 อาจเขียนได้ว่า  $\frac{dy}{dx} = f(x) g'(x) + g(x) f'(x)$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้  $y = (x^2 - 2x + 3)(2x + 5)$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก  $y = (x^2 - 2x + 3)(2x + 5)$

จะได้  $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} [(x^2 - 2x + 3)(2x + 5)]$

$$= (x^2 - 2x + 3) \frac{d}{dx} (2x + 5) + (2x + 5) \frac{d}{dx} (x^2 - 2x + 3)$$

$$= (x^2 - 2x + 3)(2 + 0) + (2x + 5)(2x - 2)$$

$$= (2x^2 - 4x + 6) + (4x^2 + 6x - 10)$$

$$= 2x^2 - 4x + 6 + 4x^2 + 6x - 10$$

$$= 6x^2 + 2x - 4$$

ตอบ

สูตรที่ 8 ถ้า  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$  โดยที่  $g(x) \neq 0$  แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x) \frac{d}{dx} f(x) - f(x) \frac{d}{dx} g(x)}{[g(x)]^2}$$

จากสูตรที่ 8 คงเขียนได้ว่า  $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x) f'(x) - f(x) g'(x)}{[g(x)]^2}$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้  $y = \frac{3x-1}{3x+1}$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก  $y = \frac{3x-1}{3x+1}$   
 จะได้  $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ \frac{3x-1}{3x+1} \right]$   

$$= \frac{(3x+1) \frac{d}{dx} (3x-1) - (3x-1) \frac{d}{dx} (3x+1)}{(3x+1)^2}$$
  

$$= \frac{(3x+1)(3-0) - (3x-1)(3+0)}{(3x+1)^2}$$
  

$$= \frac{9x+3-9x+3}{(3x+1)^2}$$
  

$$= \frac{6}{(3x+1)^2}$$
 ตอบ

ตัวอย่างที่ 3 ให้  $f(x) = \frac{4x^2-7x+2}{3x^2+4}$  จงหา  $f'(x)$

วิธีทำ จาก  $f(x) = \frac{4x^2-7x+2}{3x^2+4}$   

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left[ \frac{4x^2-7x+2}{3x^2+4} \right]$$
  

$$= \frac{(3x^2+4) \frac{d}{dx} (4x^2-7x+2) - (4x^2-7x+2) \frac{d}{dx} (3x^2+4)}{(3x^2+4)^2}$$
  

$$= \frac{(3x^2+4)(8x-7+0) - (4x^2-7x+2)(6x)}{(3x^2+4)^2}$$
  

$$= \frac{(24x^3-21x^2+32x-28) - (24x^3-42x^2+12x)}{(3x^2+4)^2}$$
  

$$= \frac{24x^3-21x^2+32x-28-24x^3+42x^2-12x}{(3x^2+4)^2}$$
  

$$= \frac{21x^2+20x-28}{(3x^2+4)^2}$$
 ตอบ



รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>แบบฝึกทักษะ</b>	รหัสแบบฝึกทักษะที่ 6.3 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6 ชั่วโมงที่ 33-34 จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
---	--------------------	--

### แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ข้อที่ 1.3

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบแต่ละข้อลงในตารางให้ถูกต้อง

ข้อที่	คำถาม	คำตอบ
1	กำหนดให้ $y = (2x + 1)(x + 3)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	
2	กำหนดให้ $y = (x^2 + 2x + 3)(3x + 2)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	
3	กำหนดให้ $f(x) = (x + 2)(x + 4)$ จงหา $f'(x)$	
4	กำหนดให้ $f(x) = (3x^2 + 1)(x + 2)$ จงหา $f'(x)$	
5	กำหนดให้ $y = \frac{x+1}{x-2}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	
6	กำหนดให้ $y = \frac{1+4x}{1-4x}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	
7	กำหนดให้ $y = \frac{2x^2 + 3x - 1}{x - 2}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	
8	กำหนดให้ $f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 1}{x + 3}$ จงหา $f'(x)$	

คะแนนที่ได้ .....

ผู้ตรวจ .....

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ.....

ชื่อ .....

นามสกุล .....

ชั้น ..... เลขที่ .....

เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 6.3

1)  $4x + 7$

2)  $9x^2 + 16x + 13$

3)  $2x + 6$

4)  $9x^2 + 13x + 1$

5)  $\frac{-3}{(x - 2)^2}$

6)  $\frac{8}{(1 - 4x)^2}$

7)  $\frac{2x^2 - 8x - 5}{(x - 2)^2}$

8)  $\frac{2x^2 + 12x + 11}{(x + 3)^2}$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัสเอกสารประกอบการสอนที่ 6.4 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6 ชั่วโมงที่ 35 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
---	--------------------	--

### จุดประสงค์การเรียนรู้

1.4 นำความรู้เรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร ไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้

### สาระสำคัญ

สูตรในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันสามารถนำมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง และการเคลื่อนที่ของวัตถุได้

### สาระการเรียนรู้

#### โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการใช้สูตรการหาอนุพันธ์

ตัวอย่างที่ 1 จงหาจุดบนเส้นโค้ง  $y = x^3 - 12x$  เมื่อเส้นสัมผัสที่จุดเหล่านั้นขนานกับแกน X

วิธีทำ จาก  $y = x^3 - 12x$   
จะได้  $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - 12x)$   
 $= 3x^2 - 12$

นั่นคือ เส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด  $(x, y)$  ใด ๆ จะมีความชันเท่ากับ  $3x^2 - 12$  แต่เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่ขนานกับแกน X ก็คือเส้นตรงที่มีความชันเป็นศูนย์

$$\therefore 3x^2 - 12 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$\therefore \text{จะได้ } x = 2 \text{ หรือ } x = -2$$

$$\text{เมื่อ } x = 2 \text{ จะได้ } y = (2)^3 - 12(2) = -16$$

$$x = -2 \text{ จะได้ } y = (-2)^3 - 12(-2) = 16$$

$\therefore$  จุดบนเส้นโค้งที่เส้นสัมผัสที่จุดนั้นขนานกับแกน X คือ จุด  $(-2, 16)$  และ  $(2, -16)$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาจุดบนเส้นโค้ง  $y = \frac{3}{2}x^2 + 4x + 1$  ที่ทำให้เส้นสัมผัสที่จุดดังกล่าว

ตั้งฉากกับเส้นตรง  $x - 2y + 4 = 0$

วิธีทำ ให้  $P(m, n)$  เป็นที่ต้องการหา

เนื่องจากจุด  $P$  อยู่บนเส้นโค้ง  $y = \frac{3}{2}x^2 + 4x + 1$  จะได้ว่า

$$n = \frac{3}{2}m^2 + 4m + 1 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

จาก  $y = \frac{3}{2}x^2 + 4x + 1$

จะได้  $\frac{dy}{dx} = 3x + 4$  ซึ่งคือความชันของเส้นสัมผัสที่จุด  $(x, y)$  ใด ๆ

แต่เส้นสัมผัสที่ตั้งฉากกับเส้นตรง  $x - 2y + 4 = 0$  ซึ่งมีความชันเท่ากับ  $\frac{1}{2}$

$\therefore$  เส้นสัมผัสจะมีความชันเท่ากับ  $-2$

$$\therefore 3x + 4 = -2$$

$$3x = -6$$

$$x = -2$$

นั่นคือ จะได้  $m = -2$  นำไปแทนค่าใน  $\textcircled{1}$  จะได้

$$n = \frac{3}{2}(-2)^2 + 4(-2) + 1 = -1$$

$\therefore$  จุด  $P$  ที่ต้องการ คือ  $(-2, -1)$

ตอบ

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบฝึกทักษะ	รหัสแบบฝึกทักษะที่ 6.4 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6 ชั่วโมงที่ 35 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
---	-------------	---

### แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ข้อที่ 1.4

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบแต่ละข้อต่อไปนี้ลงในตารางให้ถูกต้องสมบูรณ์

ข้อที่	คำถาม	คำตอบ
1	จงหาสมการของเส้นสัมผัสและเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2 + x - 1$ ที่จุด $x = 1$	
2	จงหาสมการของเส้นสัมผัสและเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3 - 2x^2 + 3$ ที่จุด $x = 2$	
3	จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ ที่จุด $x = 4$	
4	จงหาจุดบนเส้นโค้ง $y = x^3 - 3x$ ที่เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดนั้นขนานกับแกน X	
5	วัตถุชนิดหนึ่งเคลื่อนที่ตามสมการ $S = t^3 - 2t + 5$ เมื่อ S เป็นระยะทางมีหน่วยเป็นเมตร t เป็นเวลามีหน่วยเป็นวินาที จงหาความเร็วของวัตถุนี้ในขณะ $t = 10$ วินาที	

คะแนนที่ได้ .....

ผู้ตรวจ .....

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ.....

ชื่อ .....

นามสกุล .....

ชั้น ..... เลขที่ .....

เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 6.4

1)  $3x - y - 2 = 0$  ;  $x + 3y - 4 = 0$

2)  $4x - y - 5 = 0$  ;  $x + 4y - 14 = 0$

3)  $x - 4y + 4 = 0$

4)  $(1, -2)$  และ  $(-1, 2)$

5) 298 เมตรต่อวินาที



รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7 สัปดาห์ที่ 12 – 13 ชั่วโมงที่ 36 – 39	เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิท จำนวนชั่วโมงสอน 4 ชั่วโมง
---	---	---

### จุดประสงค์การเรียนรู้

1. ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ
  - 1.1 บอกความหมายของฟังก์ชันคอมโพสิทได้
  - 1.2 บอกกฎลูกโซ่ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิทได้
  - 1.3 หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิทได้
2. ด้านทักษะกระบวนการ นักเรียนมีความสามารถ
  - 2.1 ในการแก้ปัญหา
  - 2.2 ในการให้เหตุผล
  - 2.3 ในการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ
  - 2.4 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์
3. ด้านคุณลักษณะ นักเรียน
  - 3.1 มีความรับผิดชอบ
  - 3.2 มีความซื่อสัตย์
  - 3.3 มีความเชื่อมั่นในตนเอง
  - 3.4 มีระเบียบวินัย

### สาระการเรียนรู้

อนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิท



### กิจกรรมการเรียนรู้

ชั่วโมงที่	กิจกรรมการเรียนรู้ / สื่อการเรียนรู้
36 – 39	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. แจกจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ ว่า เมื่อเรียนจบแผนการเรียนรู้แล้ว นักเรียนจะสามารถ               <ul style="list-style-type: none"> <li>- บอกความหมายของฟังก์ชันคอมโพสิทได้</li> <li>- บอกกฎลูกโซ่ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิทได้</li> <li>- หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิทได้</li> </ul> </li> <li>2. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตรที่ 1 – 8 โดยใช้ การถาม – ตอบ</li> <li>3. นักเรียนแต่ละกลุ่มทำใบกิจกรรม รหัสที่ 7.1 แล้วร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับ ความหมายของฟังก์ชันคอมโพสิท โดยครูเดินดูรอบ ๆ และช่วยเหลือนักเรียนเมื่อมี ปัญหาสงสัย</li> <li>4. นักเรียนแต่ละกลุ่มทำใบกิจกรรม รหัสที่ 7.2 ตามตัวอย่าง แล้วร่วมกัน อภิปรายเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิทว่ามีวิธีการหาอย่างไร โดยครูคอย ชี้แนะและอธิบายเพิ่มเติม แล้วบันทึกลงในแบบสรุบนี้อา รหัสที่ 7</li> <li>5. นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 7 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลย และบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง</li> <li>6. นักเรียนแต่ละกลุ่มหาโจทย์เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิท กลุ่ม ละ 10 ข้อ จากหนังสือต่าง ๆ ในห้องสมุด หรืออินเทอร์เน็ต แล้วส่งตัวแทนนำเสนอ หน้าชั้นเรียน และทำเป็นรายงานส่งเป็นผลงานของกลุ่ม</li> </ol>

### สื่อการเรียนรู้

1. ใบกิจกรรม รหัสที่ 7.1 – 7.2
2. แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 7
3. แบบสรุบนี้อา รหัสที่ 7

### แหล่งการเรียนรู้

1. ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
2. ห้องสมุดโรงเรียน
3. ห้องสมุดประชาชน
4. อินเทอร์เน็ต

### หลักฐานการเรียนรู้

1. ใบกิจกรรม รหัสที่ 7.1 – 7.2
2. แบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 7
3. แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 7

### การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นักเรียนส่วนใหญ่ตอบคำถามได้ถูกต้อง
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	2. นักเรียนสนใจร่วมกิจกรรมดี
3. การทำแบบฝึกทักษะ	3. นักเรียนส่วนใหญ่ทำได้ถูกต้อง
4. การทำแบบสรุปเนื้อหา	4. นักเรียนส่วนใหญ่ทำได้ถูกต้อง
5. การทำรายงาน	5. นักเรียนส่วนใหญ่สนใจและรับผิดชอบในการทำรายงานดี

## บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

### 1. สรุปผลการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### 2. แนวทางในการแก้ไขและพัฒนา

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### 3. ข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ ..... ครูผู้สอน

(นายวิเชียร กীরติศักดิ์กุล)

ครู วิทยฐานะ ครูชำนาญการพิเศษ

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ. ....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>ใบกิจกรรม</b>	รหัสใบกิจกรรมที่ 7.1 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7 ชั่วโมงที่ 36 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
---	------------------	---

**คำชี้แจง**

ให้นักเรียนเติมคำตอบลงในช่องว่างแต่ละข้อต่อไปนี้อย่างถูกต้องสมบูรณ์

<p>1. กำหนด <math>f(x) = x^2 + 2x - 1</math> และ <math>g(x) = x^3 + 3</math> จงหา</p> <p>1.1 <math>(g \circ f)(2) = \dots\dots\dots</math></p> <p>1.2 <math>(f \circ g)(3) = \dots\dots\dots</math></p> <p>1.3 <math>(f \circ g)(-2) = \dots\dots\dots</math></p> <p>2. กำหนดให้ <math>f(x) = 2x + 5</math> และ <math>g(x) = 2x - 3</math> จงหา</p> <p>2.1 <math>(g \circ f)(1) = \dots\dots\dots</math></p> <p>2.2 <math>(f \circ g)(5) = \dots\dots\dots</math></p> <p>3. กำหนดให้ <math>f(x) = 2^x</math> และ <math>g(x) = 3^{-x}</math> จงหา</p> <p>3.1 <math>(g \circ f)(2) = \dots\dots\dots</math></p> <p>3.2 <math>(f \circ g)(-3) = \dots\dots\dots</math></p>
---

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>ใบกิจกรรม</b>	รหัสใบกิจกรรมที่ 7.2 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7 ชั่วโมงที่ 37 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
---	------------------	---

**คำชี้แจง**                      ให้นักเรียนหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ตามตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง**    ให้     $y = (x^2 + 1)^5$     จงหา  $\frac{dy}{dx}$

**วิธีทำ**        ให้         $u = x^2 + 1$

$$\therefore y = (x^2 + 1)^5 = u^5$$

ใช้กฎลูกโซ่ จะได้

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{du^5}{du} \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 1) \\ &= 5u^4 (2x) \\ &= 5(x^2 + 1)^4(2x) \\ &= 10x(x^2 + 1)^4 \end{aligned}$$

1. ให้  $y = \sqrt{1 - 3x^2}$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$

**วิธีทำ**    ให้     $u = 1 - 3x^2$

$$\begin{aligned} \therefore y &= \sqrt{1 - 3x^2} \\ &= (1 - 3x^2)^{\frac{1}{2}} = u^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

จากกฎลูกโซ่ จะได้

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

2. ให้  $f(x) = (3x - 1)^4$  จงหา  $f'(x)$

**วิธีทำ**    ให้     $u = \dots\dots\dots$

$$\therefore y = (3x - 1)^4 = u^4$$

จากกฎลูกโซ่ จะได้

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

3. ให้  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x^2 - 1}}$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ ให้  $u = 2x^2 - 1$

$\therefore y = \dots\dots\dots$

จากกฎลูกโซ่ จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

4. ให้  $y = (x^3 + 2x^2 + 1)^7$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ ให้  $u = \dots\dots\dots$

$\therefore y = \dots\dots\dots$

จากกฎลูกโซ่ จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$



สรุป จากการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันในข้อ 1 - ข้อ 4 สามารถหาอนุพันธ์โดยใช้สูตรดังนี้

ให้  $y = u^n$  จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>แบบฝึกทักษะ</b>	รหัสแบบฝึกทักษะที่ 7 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7 ชั่วโมงที่ 37-39 จำนวนชั่วโมงสอน 3 ชั่วโมง
---	--------------------	--

### แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ข้อที่ 1.3

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบแต่ละข้อลงในตารางให้ถูกต้องสมบูรณ์

ข้อที่	คำถาม	คำตอบ
1	ให้ $y = (2x + 3)^5$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	
2	ให้ $y = (1 - 3x)^3$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	
3	ให้ $y = (3 - 4x^2)^4$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	
4	ให้ $y = (2 - 3x + 4x^2)^3$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	
5	ให้ $y = (x^3 - 2x)^4$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	
6	ให้ $y = \sqrt{1 - 2x}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	
7	ให้ $y = (1 - 5x)^6$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	
8	ให้ $y = \left(\frac{x}{x+1}\right)^6$ จงหา $\frac{dy}{dx}$	

คะแนนที่ได้ .....

ผู้ตรวจ .....

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ.....

ชื่อ .....

นามสกุล .....

ชั้น ..... เลขที่ .....

เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 7

- 1)  $10(2x + 3)^4$
- 2)  $-9(1 - 3x)^2$
- 3)  $-32x(3 - 4x^2)^3$
- 4)  $(-9 + 24x)(2 - 3x + 4x^2)^2$
- 5)  $(12x^2 - 8)(x^3 - 2x)^3$
- 6)  $\frac{1}{\sqrt{1 - 2x}}$
- 7)  $-30(1 - 5x)^5$
- 8)  $\frac{5x^4}{(1 + x)^6}$



รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>แบบสรุปเนื้อหา</b>	รหัสแบบสรุปเนื้อหาที่ 7 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7 ชั่วโมงที่ 36-39 จำนวนชั่วโมงสอน 4 ชั่วโมง
---	-----------------------	---

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนสรุปเนื้อหาตามใบกิจกรรมที่ 7.1 – 7.2 ตามหัวข้อต่อไปนี้

1. ฟังก์ชันคอมโพสิท คือ .....  
 .....  
 .....  
 .....
2. กฎลูกโซ่ มีสูตรดังนี้ .....  
 .....  
 .....  
 .....
3. ถ้าให้  $u = f(x)$  จะได้  $y = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(u)$   
 นั่นคือ ถ้า  $u = f(x)$  และ  $y = g(u)$  แล้ว

$\frac{dy}{dx} =$
-------------------

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8 สัปดาห์ที่ 14 ชั่วโมงที่ 40 – 42	เรื่อง อนุพันธ์อันดับสูง จำนวนชั่วโมงสอน 3 ชั่วโมง
---	--	---

### จุดประสงค์การเรียนรู้

#### 1. ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

- 1.1 บอกความหมายของอนุพันธ์อันดับที่  $n$  ของฟังก์ชัน เมื่อ  $n \in \mathbb{I}$  และ  $n > 1$  ได้
- 1.2 หาอนุพันธ์อันดับที่  $n$  ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ เมื่อ  $n \in \mathbb{I}$  และ  $n > 1$  ได้
- 1.3 นำความรู้เรื่องอนุพันธ์อันดับสูงไปใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์ได้

#### 2. ด้านทักษะกระบวนการ นักเรียนมีความสามารถ

- 2.1 ในการแก้ปัญหา
- 2.2 ในการให้เหตุผล
- 2.3 ในการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ
- 2.4 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

#### 3. ด้านคุณลักษณะ นักเรียน

- 3.1 มีความรับผิดชอบ
- 3.2 มีความซื่อสัตย์
- 3.3 มีความเชื่อมั่นในตนเอง
- 3.4 มีระเบียบวินัย

### สาระการเรียนรู้

อนุพันธ์อันดับสูง

## กิจกรรมการเรียนรู้

ชั่วโมงที่	กิจกรรมการเรียนรู้ / สื่อการเรียนรู้
40	<p>1. แจกจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบว่า เมื่อเรียนจบแผนการเรียนรู้แล้ว นักเรียนจะสามารถ</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- บอกความหมายของอนุพันธ์อันดับที่ <math>n</math> ของฟังก์ชัน เมื่อ <math>n \in \mathbb{I}</math> และ <math>n &gt; 1</math> ได้</li> <li>- หาอนุพันธ์อันดับที่ <math>n</math> ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ เมื่อ <math>n \in \mathbb{I}</math> และ <math>n &gt; 1</math> ได้</li> <li>- นำความรู้เรื่องอนุพันธ์อันดับสูงไปใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์ได้</li> </ul> <p>2. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร โดยใช้การถาม – ตอบ</p> <p>3. นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 8.1 โดยศึกษาเนื้อหาและตัวอย่างให้ละเอียด แล้วร่วมกันสรุปวิธีการหาอนุพันธ์อันดับสูงของฟังก์ชัน โดยครูคอยอธิบายเพิ่มเติม เมื่อนักเรียนมีปัญหาสงสัย หลังจากนั้นบันทึกลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 8</p> <p>4. ครูให้นักเรียนอาสาหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันจากโจทย์ที่กำหนดให้บนกระดาน ดังนี้</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. จงหา <math>y'''</math> เมื่อ <math>y = x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 5</math></li> <li>2. จงหา <math>f'''(x)</math> เมื่อ <math>f(x) = x^5 + 2x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 10</math></li> </ol> <p>5. ครูชมเชยนักเรียนที่ออกมาแสดงวิธีหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันให้เพื่อนดู พร้อมทั้งให้เพื่อนปรบมือให้กำลังใจ เพื่อเป็นการเสริมแรงในการเรียนรู้ของนักเรียน</p> <p>6. นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 8.1 เป็นการบ้านเพื่อเสริมทักษะและความแม่นยำในการเรียนรู้</p>
41 - 42	<p>1. ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 8.1 แล้วให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจและบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง</p> <p>2. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์อันดับสูงของฟังก์ชัน และอัตราการเปลี่ยนแปลง โดยใช้การถาม – ตอบ</p> <p>3. นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 8.2 โดยร่วมกันศึกษาเนื้อหาและตัวอย่างให้ละเอียด หากมีปัญหาสงสัยให้สอบถามครูผู้สอน</p> <p>4. นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 8.2 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลย และบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง</p> <p>5. นักเรียนแต่ละกลุ่มทำบัตรคำถาม กลุ่มละ 10 บัตร เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์อันดับที่ <math>n</math> เมื่อ <math>n &gt; 1</math> กลุ่มละ 10 บัตร โดยกำหนดขนาด และออกแบบบัตรเอง โดยอิสระ เป็นผลงานของกลุ่ม ส่งครูนอกเวลาเรียน</p>

## สื่อการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 8.1 – 8.2
2. แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 8.1 – 8.2
3. แบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 8

### แหล่งการเรียนรู้

1. ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
2. ห้องสมุดโรงเรียน
3. ห้องสมุดประชาชน
4. อินเทอร์เน็ต

### หลักฐานการเรียนรู้

1. แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 8.1 – 8.2
2. แบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 8
3. บัตรคำถาม เรื่อง การหาอนุพันธ์อันดับสูง

### การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นักเรียนส่วนใหญ่ตอบคำถามได้ถูกต้อง
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	2. นักเรียนสนใจร่วมกิจกรรมดี
3. การทำแบบฝึกทักษะ	3. นักเรียนส่วนใหญ่ทำได้ถูกต้อง
4. การทำแบบสรุปเนื้อหา	4. นักเรียนส่วนใหญ่สรุปเนื้อหาได้ถูกต้อง
5. การทำบัตรคำถาม	5. นักเรียนส่วนใหญ่มีความรับผิดชอบดี และทำบัตรคำถามได้ถูกต้องสวยงาม

บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

1. สรุปผลการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. แนวทางในการแก้ไขและพัฒนา

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. ข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ ..... ครูผู้สอน

(นายวิเชียร กীরติศักดิ์กุล)

ครู วิทยฐานะ ครูชำนาญการพิเศษ

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ. ....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>เอกสารประกอบการสอน</b>	รหัสเอกสารประกอบการสอนที่ 8.1 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8 ชั่วโมงที่ 40 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
---	---------------------------	--

### จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1.1 บอกความหมายของอนุพันธ์อันดับที่  $n$  ของฟังก์ชัน เมื่อ  $n \in \mathbb{I}$  และ  $n > 1$  ได้  
 1.2 หาอนุพันธ์อันดับที่  $n$  ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ เมื่อ  $n \in \mathbb{I}$  และ  $n > 1$  ได้

### สาระสำคัญ

อนุพันธ์อันดับที่  $n$  ของ  $f(x)$  เป็นอนุพันธ์ของอนุพันธ์อันดับที่  $n-1$  เช่น อนุพันธ์อันดับที่ 4 ของ  $f(x)$  เป็นอนุพันธ์ของอนุพันธ์อันดับที่ 3

### สาระการเรียนรู้

#### อนุพันธ์อันดับสูง

$$\text{ถ้าให้ } f(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 - 2x + 3$$

$$\text{จะได้ } f'(x) = 5x^4 + 8x^3 + 9x^2 - 2$$

เราเรียก  $f'(x)$  ว่า อนุพันธ์อันดับหนึ่งของ  $f(x)$

ถ้าเรานำ  $f'(x)$  มาหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของ  $f'(x)$  ใหม่ว่าเป็นอนุพันธ์อันดับสองของ  $f(x)$

$$\text{นั่นคือ } f''(x) = 20x^3 + 24x^2 + 18x$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้านำ  $f''(x)$  มาหาอนุพันธ์ต่อไปเรื่อย ๆ เราก็จะได้อนุพันธ์อันดับสาม อันดับสี่ต่อไปเรื่อย ๆ และเพื่อสรุปเป็นหมวดหมู่ เรานิยมใช้สัญลักษณ์ต่อไปนี้แทนอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ดังนี้

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} \quad \text{แทน อนุพันธ์อันดับหนึ่ง}$$

$$f''(x) = y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{แทน อนุพันธ์อันดับสอง}$$

$$f'''(x) = y''' = \frac{d^3y}{dx^3} \quad \text{แทน อนุพันธ์อันดับสาม}$$

⋮

$$f^{(n)}(x) = y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} \quad \text{แทน อนุพันธ์อันดับ } n$$

ตัวอย่างที่ 1 ให้  $f(x) = 3x^3 + 6x^2 + 2x - 10$  จงหา  $f'''(x)$

วิธีทำ จาก  $f(x) = 3x^3 + 6x^2 + 2x - 10$

$$\therefore f'(x) = 9x^2 + 12x + 2$$

$$f''(x) = 18x + 12$$

$$f'''(4) = 18$$

ตอบ

---

ตัวอย่างที่ 2 ให้  $y = 3x^5 + 4x^2 + 8x + 2$  จงหา  $\frac{d^4y}{dx^4}$

วิธีทำ จาก  $y = 3x^5 + 4x^2 + 8x + 2$

$$\frac{dy}{dx} = 15x^4 + 8x + 8$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 60x^3 + 8$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 180x^2$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 360x$$

ตอบ

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>แบบฝึกทักษะ</b>	รหัสแบบฝึกทักษะที่ 8.1 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8 ชั่วโมงที่ 4 0 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
---	--------------------	--

### แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ข้อที่ 1.2

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบลงในตารางแต่ละข้อต่อไปนี้ให้ถูกต้องสมบูรณ์

ข้อที่	คำถาม	คำตอบ
1	ให้ $y = x^{\frac{5}{2}} + 4x^3 - 5x + 7$ จงหา $\frac{d^3y}{dx^3}$	
2	ให้ $y = \sqrt[3]{x} - 5x^6 + 8$ จงหา $\frac{d^3y}{dx^3}$	
3	ให้ $f(x) = 5x^4 + 2x^3 - x + 2$ จงหา $f''''(x)$	
4	ให้ $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + x - 2$ จงหา $f^5(x)$	
5	ให้ $f(x) = 6 + 3x + 8x^3 - 2x^5$ จงหา $f'''(x)$	
6	ให้ $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 7$ จงหา $f''(1)$	
7	ให้ $f(x) = 5x^5 - 6x^3 + 13$ จงหา $f'''(2)$	
8	ให้ $f(x) = 4x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 10$ จงหา $f'''(3)$	

คะแนนที่ได้ .....

ผู้ตรวจ .....

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ.....

ชื่อ .....

นามสกุล .....

ชั้น ..... เลขที่ .....



เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 8.1

- 1)  $\frac{15}{8\sqrt{x}} + 24$
- 2)  $\frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}} - 600x^3$
- 3) 120
- 4) 240
- 5)  $48 - 120x^2$
- 6) 18
- 7) 1,164
- 8) 474

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัสเอกสารประกอบการสอนที่ 8.2 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8 ชั่วโมงที่ 41-42 จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
---	--------------------	---

### จุดประสงค์การเรียนรู้

1.3 นำความรู้เรื่องอนุพันธ์อันดับสูงไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้

### สาระสำคัญ

อัตราการเปลี่ยนแปลงของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน  $f$  ที่  $x$  เทียบกับ  $x$  ใด ๆ ก็คือ การหาอนุพันธ์อันดับสอง ซึ่งสามารถนำมาใช้ในเรื่องการเคลื่อนที่และในการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันของเส้นสัมผัส ขณะที่  $x$  มีค่าใด ๆ ได้

### สาระการเรียนรู้

#### โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการนำอนุพันธ์อันดับสูง

**ตัวอย่างที่ 1** เมื่อเวลา  $t$  วินาที วัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะทาง  $S = 4t^3 + 2t - 3$  เมตร  
จงหา

- 1) ความเร็วขณะเวลา  $t$  ใด ๆ
- 2) ความเร่งขณะเวลา  $t$  ใด ๆ
- 3) ความเร่งขณะเวลา  $t = 2$  วินาที

**วิธีทำ** (1) จาก  $S = 4t^3 + 2t - 3$   
จะได้  $v = \frac{dS}{dt} = 12t^2 + 2$  เมตร/วินาที

$\therefore$  ความเร็วขณะเวลา  $t$  ใด ๆ เท่ากับ  $12t^2 + 2$  เมตร/วินาที

(2) จาก  $v = 12t^2 + 2$   
จะได้  $a = \frac{dv}{dt} = 24t$  เมตร/วินาที<sup>2</sup>

$\therefore$  ความเร่งขณะเวลา  $t$  ใด ๆ เท่ากับ  $24t$  เมตร/วินาที<sup>2</sup>

(3) จาก (2) จะได้ความเร่งขณะเวลา  $t = 2$  วินาที เท่ากับ  $24(2)$

$$= 48 \text{ เมตร/วินาที}^2$$

**ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$  จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ

ความชันขณะที่  $x = 2$

วิธีทำ จาก  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$f''(x) = 6x - 4$$

ให้  $x = 2$  จะได้

$$f''(2) = 6(2) - 4$$

$$= 8$$

นั่นคือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันของเส้นสัมผัสของกราฟที่  $x = 2$  เท่ากับ 8

ตอบ

สรุป

ความเร่ง (a) ของวัตถุขณะเวลา t ใดๆ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว (v) เทียบกับเวลา t ใดๆ ถ้าวัตถุเคลื่อนที่ตามสมการเคลื่อนที่คือ  $S = f(t)$  เมื่อ S คือ ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ในเวลา t จะได้

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \text{และ} \quad v = \frac{dS}{dt}$$

$$\therefore a = \frac{d}{dt} \left( \frac{dS}{dt} \right) = \frac{d^2S}{dt^2}$$

นั่นคือ ความเร่งขณะเวลา t ใดๆ ก็คือ อนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ  $S = f(t)$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>แบบฝึกทักษะ</b>	รหัสแบบฝึกทักษะที่ 8.2 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8 ชั่วโมงที่ 41 -42 จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
---	--------------------	---

## แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ข้อที่ 1.3

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบแต่ละข้อลงในตารางให้ถูกต้องสมบูรณ์

ข้อที่	คำถาม	คำตอบ
1	วัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ได้ทาง $S = 2t^2 - 5t - 3$ ในเวลา $t$ วินาที จงหาความเร็วและความเร่งขณะ $t = 4$	
2	โยนลูกบอลลูกหนึ่งขึ้นไปในอากาศ มีสมการของการเคลื่อนที่คือ $S(t) = 88t - 2t^2$ จงหาความเร็วในขณะที่ถูกบอลถูกโยนไปได้ 10 วินาที	
3	ปล่อยวัตถุจากที่สูงลงสู่พื้นดิน วัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $S = 16t^2$ เมตร ในเวลา $t$ วินาที จงหาความเร็วขณะเวลา $t = 2$ วินาที และความเร่ง ขณะเวลา $t = 5$ วินาที	
4	โยนวัตถุขึ้นไปในอากาศ วัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $S = 128t - 16t^2$ เมตร ในเวลา $t$ วินาที จงหาความเร่งของวัตถุ ขณะเวลา $t = 2$ วินาที	
5	จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่ $x = 2$ เมื่อ $f(x) = 4x^4 - x^3 - 5x + 1$	

คะแนนที่ได้ .....

ผู้ตรวจ .....

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ.....

ชื่อ .....

นามสกุล .....

ชั้น ..... เลขที่ .....

### เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 8.2

- 1) ความเร็วขณะ  $t = 4$  เท่ากับ 11 เมตรต่อวินาที  
ความเร่งขณะ  $t = 4$  เท่ากับ 4 เมตรต่อวินาที<sup>2</sup>
- 2) 48 เมตรต่อวินาที
- 3) ความเร็วขณะ  $t = 2$  วินาที เท่ากับ 64 เมตรต่อวินาที  
ความเร่งขณะ  $t = 5$  วินาที เท่ากับ 32 เมตร/วินาที<sup>2</sup>
- 4) ความเร่งขณะ  $t = 2$  วินาที เท่ากับ 32 เมตร/วินาที<sup>2</sup>
- 5) 180

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>แบบสรุปเนื้อหา</b>	รหัสแบบสรุปเนื้อหาที่ 8 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8 ชั่วโมงที่ 40-42 จำนวนชั่วโมงสอน 3 ชั่วโมง
---	-----------------------	---

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนสรุปเนื้อหาตามเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 8.1 – 8.2  
ตามหัวข้อต่อไปนี้

1. อนุพันธ์อันดับที่  $n$  ของฟังก์ชัน หมายถึง .....
- .....
- .....
- .....
2. สัญลักษณ์ของอนุพันธ์อันดับที่ 2 คือ .....
- .....
3. สัญลักษณ์ของอนุพันธ์อันดับที่ 3 คือ .....
- .....
4. สัญลักษณ์ของอนุพันธ์อันดับที่ 5 คือ .....
- .....
5. ความเร็วขณะเวลา  $t$  ใด ๆ คือ .....
- .....
6. ความเร่งขณะเวลา  $t$  ใด ๆ คือ .....
- .....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9</b> สัปดาห์ที่ 15 – 16 ชั่วโมงที่ 43 – 47	เรื่อง การประยุกต์อนุพันธ์ จำนวนชั่วโมงสอน 5 ชั่วโมง
---	--	---

### จุดประสงค์การเรียนรู้

1. **ด้านความรู้** นักเรียนสามารถ
  - 1.1 บอกทฤษฎีบทเกี่ยวกับฟังก์ชันลดและฟังก์ชันเพิ่ม บนช่วงใด ๆ และนำไปใช้ได้
  - 1.2 บอกความหมายและหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันได้
  - 1.3 หาค่าวิกฤตและจุดวิกฤตของฟังก์ชันได้
  - 1.4 หาค่าต่ำสุดสัมบูรณ์และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
  - 1.5 นำความรู้เกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันไปใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์การหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ได้
2. **ด้านทักษะกระบวนการ** นักเรียนมีความสามารถ
  - 2.1 ในการแก้ปัญหา
  - 2.2 ในการให้เหตุผล
  - 2.3 ในการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ
  - 2.4 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์
3. **ด้านคุณลักษณะ** นักเรียน
  - 3.1 มีความรับผิดชอบ
  - 3.2 มีความซื่อสัตย์
  - 3.3 มีความเชื่อมั่นในตนเอง
  - 3.4 มีระเบียบวินัย

### สาระการเรียนรู้

1. ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด
2. การหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน
3. การหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน
4. โจทย์เกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

## กิจกรรมการเรียนรู้

ชั่วโมงที่	กิจกรรมการเรียนรู้ / สื่อการเรียนรู้
43	<p>1. แจงจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบว่า เมื่อเรียนจบแผนการเรียนรู้แล้ว นักเรียนจะสามารถ</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- บอกทฤษฎีบทเกี่ยวกับฟังก์ชันลดและฟังก์ชันเพิ่มบนช่วงใด ๆ และนำไปใช้ได้</li> <li>- บอกความหมายและหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันได้</li> <li>- หาค่าวิกฤตและจุดวิกฤตของฟังก์ชันได้</li> <li>- หาค่าต่ำสุดสัมบูรณ์และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้</li> <li>- นำความรู้เกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันไปใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์การหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ได้</li> </ul> <p>2. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยใช้การถาม – ตอบ</p> <p>3. นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 9.1 แล้วร่วมกันสรุปความหมายของฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด โดยครูคอยชี้แนะแนวทางจนกว่านักเรียนสามารถสรุปได้ หลังจากนั้นให้บันทึกลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 9</p> <p>4. นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 9.1 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลย และบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง</p> <p>5. ครูชมเชยนักเรียนที่ทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 9.1 ได้ตั้งแต่ 70% ขึ้นไป เพื่อเป็นการเสริมแรงในการเรียนรู้ของนักเรียน</p> <p>6. ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 9.1 ข้อที่นักเรียนส่วนใหญ่ทำผิดบนกระดาน เพื่อให้นักเรียนได้เห็นข้อบกพร่องของตนเองและนำไปแก้ไขปรับปรุงให้ดีขึ้น</p>
44	<p>1. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลดบนช่วงใด ๆ โดยใช้การถาม – ตอบ</p> <p>2. นักเรียนจับคู่กันศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 9.2 แล้วร่วมกันสรุปวิธีการหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ โดยครูคอยชี้แนะแนวทางจนนักเรียนสามารถสรุปได้ หลังจากนั้นบันทึกลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 9</p> <p>3. นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 9.2 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลย และบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง</p> <p>4. นักเรียนแต่ละกลุ่มจัดทำเอกสารเสริมความรู้ เรื่องการหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน เป็นผลงานของกลุ่มส่งครูผู้สอนนอกเวลาเรียน</p>
ชั่วโมงที่	กิจกรรมการเรียนรู้ / สื่อการเรียนรู้
45	<p>1. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ โดยใช้การถาม – ตอบ</p> <p>2. นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 9.3 แล้วร่วมกันสรุปวิธีการหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ โดยครูคอยชี้แนะแนวทางจนกว่านักเรียนสามารถ</p>



	<p>สรุปได้ หลังจากนั้นบันทึกลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 9</p> <p>3. ครูเขียนโจทย์การหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บนกระดาน แล้วให้นักเรียนช่วยกันหาคำตอบ เพื่อเป็นการตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนอีกครั้ง</p> <p>4. นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 9.3 เป็นการบ้านเพื่อเสริมทักษะและความแม่นยำในการเรียนรู้</p>
46-47	<p>1. ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 9.3 แล้วให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจ และบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง</p> <p>2. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ โดยใช้คำถาม – ตอบ</p> <p>3. นักเรียนดูแผ่นโปร่งใส รหัสที่ 9.1 – 9.2 แล้วเขียนผลการเรียนรู้ลงในแบบสรุปผลการเรียนจากแผ่นโปร่งใส โดยมีครูอธิบายและแนะนำ</p> <p>4. นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 9.4 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลย และบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง</p> <p>5. นักเรียนทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ เพื่อประเมินความก้าวหน้าหลังจากเรียนจบหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 (แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 – 9) แล้ว</p> <p>6. นักเรียนแต่ละกลุ่มจัดทำ Mind Map เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชันเป็นผลงานของกลุ่ม ส่งครูนอกเวลาเรียน</p>

### สื่อการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 9.1 – 9.3
2. แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 9.1 – 9.4
3. แบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 9
4. แผ่นโปร่งใส รหัสที่ 9.1 – 9.2

### แหล่งการเรียนรู้

1. ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
2. ห้องสมุดโรงเรียน
3. ห้องสมุดประชาชน
4. อินเทอร์เน็ต

### หลักฐานการเรียนรู้

1. แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 9.1 – 9.4
2. แบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 9
3. Mind Map เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

## การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นักเรียนส่วนใหญ่ตอบคำถามได้ถูกต้อง
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	2. นักเรียนสนใจร่วมกิจกรรมดี
3. การทำแบบฝึกทักษะ	3. นักเรียนส่วนใหญ่ทำได้ถูกต้อง
4. การทำแบบสรุบน้ำ้อหา	4. นักเรียนส่วนใหญ่สรุบน้ำ้อหาได้ถูกต้องครบถ้วน
5. การทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์	5. นักเรียนส่วนใหญ่ทำได้ผ่านเกณฑ์ขั้นต่ำที่กำหนดไว้ คือ 50%
6. การทำ Mind Map	6. นักเรียนส่วนใหญ่ทำได้ถูกต้อง และสวยงาม

## บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

## 1. สรุปผลการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## 2. แนวทางการแก้ไขและพัฒนา

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## 3. ข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

ลงชื่อ .....

ครูผู้สอน

(นายวิเชียร กิรติศักดิ์กุล)

ครู วิทยฐานะ ครูชำนาญการพิเศษ

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ. ....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>เอกสารประกอบการสอน</b>	รหัสเอกสารประกอบการสอนที่ 9.1 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9 ชั่วโมงที่ 43 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
---	---------------------------	--

### จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 บอกทฤษฎีบทเกี่ยวกับฟังก์ชันลดและฟังก์ชันเพิ่มบนช่วงใด ๆ และนำไปใช้ได้

### สาระสำคัญ

ถ้า  $y = f(x)$  เป็นฟังก์ชันที่มีกราฟต่อเนื่องในช่วงเปิด  $(a, b)$  ถ้า  $f'(x) > 0$  เรียกว่า ฟังก์ชันเพิ่ม และ  $f'(x) < 0$  เรียกว่า ฟังก์ชันลด

### สาระการเรียนรู้

### ฟังก์ชันเพิ่ม และฟังก์ชันลด

โดยทั่วไปฟังก์ชันใด ๆ จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด จะต้องมิลักษณะดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

<b>ทฤษฎีบท</b>	ให้ฟังก์ชัน $f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และสามารถหาอนุพันธ์ของ $f$ ได้ทุก ๆ จุด ในช่วงเปิด $(a, b)$
	1) ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุก ๆ $x$ บนช่วง $(a, b)$ แล้ว $f$ จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[a, b]$
	2) ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุก ๆ $x$ บนช่วง $(a, b)$ แล้ว $f$ จะเป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[a, b]$

**ตัวอย่างที่ 1** ให้  $f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$  จงหา

- ช่วงที่ทำให้  $f$  เป็นฟังก์ชันลด
- ช่วงที่ทำให้  $f$  เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

**วิธีทำ** จาก  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$

เนื่องจาก  $f$  เป็นฟังก์ชันพหุนาม  
ดังนั้น  $f$  มีความต่อเนื่องทุกค่าของ  $x$  ที่เป็นจำนวนจริง  
จาก  $f(x)$  ที่โจทย์กำหนด จะได้

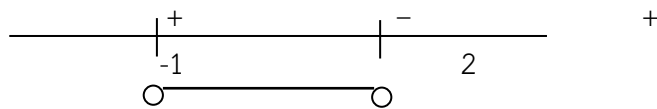
$$f'(x) = x^2 - x - 2$$

1) เนื่องจากค่า  $x$  ที่จะทำให้  $f$  เป็นฟังก์ชันลดคือค่า  $x$  ที่ทำให้  $f'(x)$  เป็นจำนวนลบ

$$\text{นั่นคือ } f'(x) < 0$$

$$x^2 - x - 2 < 0$$

$$(x - 2)(x + 1) < 0$$



จากกราฟช่วงที่ทำให้  $f'(x) < 0$  คือ  $(-1, 2)$

$\therefore$  ช่วงที่ทำให้  $f$  เป็นฟังก์ชันลด คือ  $[-1, 2]$

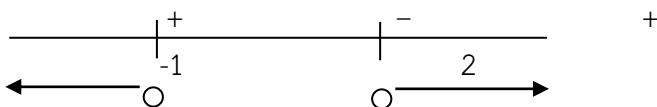
**ตอบ**

2) เนื่องจากค่า  $x$  ที่จะทำให้  $f$  เป็นฟังก์ชันเพิ่มคือ ค่า  $x$  ที่ทำให้  $f'(x)$  เป็นจำนวนบวก

$$\text{นั่นคือ } f'(x) > 0$$

$$x^2 - x - 2 > 0$$

$$(x - 2)(x + 1) > 0$$



จากกราฟช่วงที่ทำให้  $f'(x) > 0$  คือ  $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$

$\therefore$  ช่วงที่ทำให้  $f$  เป็นฟังก์ชันเพิ่ม คือ  $(-\infty, -1] \cup [2, \infty)$

**ตอบ**

**ตัวอย่างที่ 2** จงหาช่วงที่ทำให้ฟังก์ชัน  $f(x) = x^3 - 3x + 2$  เป็นฟังก์ชันลด

**วิธีทำ** จาก  $f(x) = x^3 - 3x + 2$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 - 3$$

พิจารณาค่า  $x$  ที่ทำให้  $f'(x) < 0$

$$3x^2 - 3 < 0$$

$$3(x^2 - 1) < 0$$

$$x^2 - 1 < 0$$

$$(x + 1)(x - 1) < 0$$



จากกราฟ จะพบว่าช่วงที่ทำให้  $3x^2 - 3 < 0$  คือ  $(-1, 1)$

$\therefore$  ช่วงที่ทำให้  $f$  เป็นฟังก์ชันลด คือ  $[-1, 1]$

**ตอบ**

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>แบบฝึกทักษะ</b>	รหัสแบบฝึกทักษะที่ 9.1 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9 ชั่วโมงที่ 43 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
---	--------------------	---

### แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ข้อที่ 1.1

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนเติมคำตอบแต่ละข้อต่อไปนี้ลงในตารางให้ถูกต้องสมบูรณ์

ข้อที่	คำถาม	คำตอบ
1	จงหาช่วงที่ทำให้ $f$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มและช่วงที่ทำให้ $f$ เป็นฟังก์ชันลด จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ จากข้อ 1 – 5 $f(x) = x^2 - 4x + 8$	
2	$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 3$	
3	$f(x) = 2 + 2x - x^2$	
4	$f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + 6$	
5	$f(x) = x^3 + 3x - 4$	

คะแนนที่ได้ .....

ผู้ตรวจ .....

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ.....

ชื่อ .....

นามสกุล .....

ชั้น ..... เลขที่ .....

### เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 9.1

- 1) ช่วง  $[2, \infty)$  เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ,  
ช่วง  $(-\infty, 2]$  เป็นฟังก์ชันลด
- 2) ช่วง  $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$  เป็นฟังก์ชันเพิ่ม  
ช่วง  $[-1, 3]$  เป็นฟังก์ชันลด
- 3) ช่วง  $(-\infty, 1]$  เป็นฟังก์ชันเพิ่ม  
ช่วง  $[1, \infty)$  เป็นฟังก์ชันลด
- 4) ช่วง  $[-1, 1] \cup [2, \infty)$  เป็นฟังก์ชันเพิ่ม  
ช่วง  $(-\infty, -1] \cup [1, 2]$  เป็นฟังก์ชันลด
- 5) เป็นฟังก์ชันเพิ่มตลอดช่วง  $(-\infty, \infty)$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>เอกสารประกอบการสอน</b>	รหัสเอกสารประกอบการสอนที่ 9.2 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9 ชั่วโมงที่ 44-45 จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
---	---------------------------	---

### จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1.2 บอกความหมายและหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันได้
- 1.3 หาค่าวิกฤตขณะจุดวิกฤตของฟังก์ชันได้

### สาระสำคัญ

ค่าของ  $f(x)$  เปลี่ยนจากบวกเป็นลบ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และถ้า  $f(x)$  เปลี่ยนจากลบเป็นบวก จะเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

### สาระการเรียนรู้

#### ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน นิยามได้ดังนี้

**บทนิยาม** ฟังก์ชัน  $f$  มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่  $x = c$  ถ้ามีช่วง  $(a, b) \subset D_f$  และ  $c \in (a, b)$  โดยที่  $f(c) > f(x)$  สำหรับทุก  $x$  ในช่วง  $(a, b)$  ที่  $x \neq c$   
ฟังก์ชัน  $f$  มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่  $x = c$  ถ้ามีช่วง  $(a, b) \subset D_f$  และ  $c \in (a, b)$  โดยที่  $f(c) < f(x)$  สำหรับทุก  $x$  ในช่วง  $(a, b)$  ที่  $x \neq c$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน  $f$  เมื่อกำหนดให้

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$$

วิธีทำ จาก  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$

จะได้  $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$

ให้  $6x^2 + 6x - 12 = 0$

$$6(x^2 + x - 2) = 0$$

$$6(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = -2, 1$$

ถ้า  $x < -2$  จะได้  $f'(x) > 0$

ถ้า  $x > -2$  จะได้  $f'(x) < 0$

$\therefore f$  มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่  $x = -2$  และมีค่าเท่ากับ 13

ถ้า  $x < 1$  จะได้  $f'(x) < 0$

ถ้า  $x > 1$  จะได้  $f'(x) > 0$

$\therefore f$  มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่  $x = 1$  และมีค่าเท่ากับ -14

ตอบ

นอกจากนี้เราสามารถใช้ออนุพันธ์อันดับที่ 2 ช่วยในการหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท** กำหนดให้  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $S$  ใด ๆ และ  $c$  เป็นค่าวิกฤตของ  $f$  ซึ่ง  $f'(c) = 0$

1. ถ้า  $f''(c) > 0$  แล้ว  $f(c)$  เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
2. ถ้า  $f''(c) < 0$  แล้ว  $f(c)$  เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ  $f(x) = x^3 - 3x$

วิธีทำ จาก  $f(x) = x^3 - 3x$

จะได้  $f'(x) = 3x^2 - 3$

ให้  $f'(x) = 0$

$$\therefore 3x^2 - 3 = 0$$

$$3(x^2 - 1) = 0$$

$$3(x + 1)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = 1, -1$$

จาก  $f(x) = x^3 - 3x$

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(1) = 6$$

$$f''(-1) = -6$$



สรุป

วิธีการหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ มีขั้นตอนดังนี้

จากฟังก์ชัน  $y = f(x)$  ที่โจทย์กำหนดให้

1. หา  $f'(x)$

2. ให้  $f'(x) = 0$

หาค่า  $x$  ที่ทำให้สมการนั้นเป็นจริง

ซึ่งค่า  $x$  ที่ได้เรียกว่า ค่าวิกฤต

3. นำค่าวิกฤตไปตรวจสอบ ซึ่งมีวิธีตรวจสอบ 2 วิธี คือ

3.1 ตรวจสอบโดยพิจารณาจากความชันของเส้นสัมผัส

- ถ้าความชันเปลี่ยนจากบวกไปเป็นลบ จะให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์
- ถ้าความชันเปลี่ยนจากลบไปเป็นบวก จะให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

3.2 ตรวจสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับที่ 2 ดังนี้

- ถ้า  $f''(x) > 0$  จะให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
- ถ้า  $f''(x) < 0$  จะให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์
- ถ้า  $f''(x) = 0$  แสดงว่าตรวจสอบวิธีนี้ได้ไม่ได้ ต้องตรวจสอบโดยวิธีตรวจสอบจากความชันของเส้นสัมผัส

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบฝึกทักษะ	รหัสแบบฝึกทักษะที่ 9.2 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9 ชั่วโมงที่ 44-45 จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
---	-------------	--

### แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ข้อที่ 1.2 – 1.3

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบแต่ละข้อลงในตารางให้ถูกต้องสมบูรณ์

ข้อที่	คำถาม	คำตอบ
1	จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ จากข้อ 1 – 6 $f(x) = x^2 + 3$	
2	$f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x - 3$	
3	$f(x) = -3x^2 - 2$	
4	$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2$	
5	$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2$	
6	$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$	

คะแนนที่ได้ .....

ผู้ตรวจ .....

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ.....

ชื่อ .....

นามสกุล .....

ชั้น ..... เลขที่ .....

### เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 9.2

1. ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ เท่ากับ 3
2. ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ เท่ากับ  $\frac{91}{3}$   
ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ เท่ากับ  $-\frac{17}{3}$
3. ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ เท่ากับ -2
4. ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ เท่ากับ 1
5. ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ เท่ากับ -3  
ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ เท่ากับ -2

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัสเอกสารประกอบการสอนที่ 9.3 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9 ชั่วโมงที่ 46 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
---	--------------------	--

### จุดประสงค์การเรียนรู้

1.4 หาค่าต่ำสุดสัมบูรณ์และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

### สาระสำคัญ

ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ คือ ค่าของฟังก์ชันที่มีค่าน้อยที่สุดและมากที่สุด ในช่วง  $[a, b]$  เมื่อฟังก์ชันดังกล่าวเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $[a, b]$

### สาระการเรียนรู้

### ค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

ค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน นิยามได้ดังนี้

**บทนิยาม** ฟังก์ชัน  $f$  มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่  $x = c$  ถ้า  $f(c) > f(x)$   
 สำหรับทุก  $x$  ในโดเมนของ  $f$  ที่  $x \neq c$   
 ฟังก์ชัน  $f$  มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่  $x = c$  ถ้า  $f(c) < f(x)$   
 สำหรับทุก  $x$  ในโดเมนของ  $f$  ที่  $x \neq c$

ตัวอย่างที่ 1 ให้  $f(x) = x^3 + x^2 - 8x - 1$  เป็นฟังก์ชันบนช่วงปิด  $[-4, 2]$

จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน

วิธีทำ ขั้นที่ 1 หาค่าวิกฤตของฟังก์ชัน

$$\text{จาก } f(x) = x^3 + x^2 - 8x - 1$$

$$\text{จะได้ } f'(x) = 3x^2 + 2x - 8$$

$$\text{ให้ } f'(x) = 0$$

$$\therefore 3x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(3x - 4)(x + 2) = 0$$

$$x = \frac{4}{3}, -2$$

ค่าวิกฤต คือ  $x = \frac{4}{3}$  และ  $x = -2$

$$\therefore f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 8\left(\frac{4}{3}\right) - 1$$

$$= -\frac{203}{27}$$

$$f(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - 8(-2) - 1$$

$$= 11$$

ขั้นที่ 2 เนื่องจากจุดปลายของช่วงเปิด  $[-4, 2]$  คือ  $x = -4$  และ  $x = 2$

$$\therefore f(-4) = (-4)^3 + (-4)^2 - 8(-4) - 1$$

$$= -17$$

$$f(2) = 2^3 + 2^2 - 8(2) - 1$$

$$= -5$$

ขั้นที่ 3 นำค่าของ  $f\left(\frac{4}{3}\right)$ ,  $f(-2)$ ,  $f(-4)$  และ  $f(2)$  มาเปรียบเทียบกับ

$$\text{จะได้ } f(-2) = 11 \text{ มีค่ามากที่สุด}$$

$$\text{และ } f(-4) = -17 \text{ มีค่าน้อยที่สุด}$$

$$\therefore \left. \begin{array}{l} \text{ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ จะมีค่าเท่ากับ } 11 \\ \text{ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ จะมีค่าเท่ากับ } -17 \end{array} \right\} \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 2 ให้  $f(x) = -x^2 + 4x + 5$  เป็นฟังก์ชันบนช่วง  $[0, 5]$  จงหาค่าสูงสุด  
สัมบูรณ์หรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

วิธีทำ จาก  $f(x) = -x^2 + 4x + 5$   
จะพบว่า ฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่องบนช่วงปิด  $[0, 5]$   
จะได้  $f'(x) = -2x + 4$   
 $\therefore -2x + 4 = 0$   
 $x = 2$

จะพบว่า  $x = 2$  เป็นค่าวิกฤตเพียงค่าเดียวบนช่วง  $[0, 5]$   
จึงสามารถตรวจสอบค่าวิกฤตว่า จะทำให้เกิดค่าสูงสุดสัมบูรณ์หรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์หรือไม่  
โดยใช้อนุพันธ์อันดับสอง

$$f''(x) = -2$$

เอา  $x = 2$  ไปแทน จะได้

$$f''(2) = -2 < 0$$

แสดงว่า  $x = 2$  เป็นค่าวิกฤตที่ทำให้เกิดค่าสูงสุดสัมบูรณ์

$$\therefore f(2) = -(2)^2 + 4(2) + 5 = 9$$

$\therefore$  ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ เท่ากับ 9

ตอบ

- ข้อสังเกต
- ① ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ไม่จำเป็นต้องเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ อาจจะเป็นค่าของฟังก์ชันที่จุดปลายของโดเมนของฟังก์ชันก็ได้
  - ② ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ไม่จำเป็นต้องเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ อาจจะเป็นค่าของฟังก์ชันที่จุดปลายโดเมนของฟังก์ชันก็ได้

สรุป

วิธีการหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

กำหนดให้  $y = f(x)$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $[a, b]$

- 1) หาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
- 2) หาค่า  $f(a)$  และ  $f(b)$
- 3) นำค่าที่ได้จากข้อ 1 และ 2 มาเปรียบเทียบกัน ค่ามากที่สุดคือค่าสูงสุดสัมบูรณ์ ค่าที่น้อยที่สุด คือ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>แบบฝึกทักษะ</b>	รหัสแบบฝึกทักษะที่ 9.3 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9 ชั่วโมงที่ 46 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
---	--------------------	---

### แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ข้อที่ 1.4

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันบนช่วงปิดที่กำหนดให้  
ในแต่ละข้อ แล้วเติมคำตอบลงในตารางให้ถูกต้องสมบูรณ์

ข้อที่	ฟังก์ชันและช่วงปิดที่กำหนดให้	คำตอบ
1	$f(x) = x^2 + \frac{4}{x}$ ; [1, 5]	
2	$f(x) = x^2 - 9x^2 + 24x$ ; [0, 10]	
3	$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ ; [-3, 3]	
4	$f(x) = x^2 + 2x - 4$ ; [-4, 3]	
5	$f(x) = 2x^3 - x^2 + 2$ ; [-2, 1]	
6	$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 4$ ; [-5, 6]	

คะแนนที่ได้ .....

ผู้ตรวจ .....

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ.....

ชื่อ .....

นามสกุล .....

ชั้น ..... เลขที่ .....

### เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 9.3

- 1) ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ มีค่าเท่ากับ 4
- 2) ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ มีค่าเท่ากับ 340
- 3) ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ เท่ากับ 11  
ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ เท่ากับ -49
- 4) ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ เท่ากับ 11  
ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ เท่ากับ -5
- 5) ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ เท่ากับ 3  
ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ เท่ากับ -18
- 6) ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ เท่ากับ 274  
ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ เท่ากับ -1



รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	แผ่นโปรงใส	รหัสแผ่นโปรงใสที่ 9.1 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9 ชั่วโมงที่ 47 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
---	------------	--

### โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

**ตัวอย่าง** ถ้าผลบวกของจำนวนหนึ่งกับ 3 เท่าของจำนวนอีกจำนวนหนึ่งเท่ากับ 60 แล้ว ผลคูณของจำนวนทั้งสองนี้จะมีค่ามากที่สุด เมื่อจำนวนทั้งสองมีค่าเท่าใด

**วิธีทำ** ให้จำนวนสองจำนวน คือ  $x$  และ  $y$

$$\text{จากโจทย์จะได้} \quad x + 3y = 60$$

$$y = \frac{60 - x}{3} = 20 - \frac{x}{3}$$

$$\text{ผลคูณของจำนวนสองจำนวน} = xy$$

$$= x \left( 20 - \frac{x}{3} \right)$$

$$\text{ให้} \quad P = 20x - \frac{1}{3}x^2$$

$$\text{จะได้} \quad P' = 20 - \frac{2}{3}x$$

$$\therefore 20 - \frac{2}{3}x = 0$$

$$x = 30$$

$$y = 10$$

$\therefore$  จำนวนทั้งสองจำนวน คือ 30 และ 10

**ตอบ**

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	แผ่นโปร่งใส	รหัสแผ่นโปร่งใสที่ 9.2 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9 ชั่วโมงที่ 47 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
---	-------------	---

### ขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

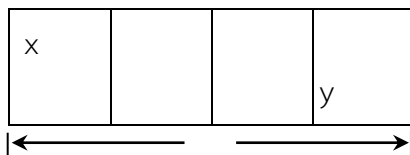
- ① อ่านโจทย์อย่างละเอียดจนทราบว่าโจทย์ต้องการให้หาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด
- ② ให้  $f(x)$  เป็นสิ่งที่โจทย์ต้องการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด
- ③  $f(x)$  ที่สร้างขึ้นต้องประกอบด้วยตัวแปรตัวเดียว
- ④ หาค่า  $f'(x)$
- ⑤ ให้  $f'(x) = 0$  แล้ว แก้มสมการหาค่า  $x$
- ⑥ นำค่าวิกฤตในข้อ 5 มาทำการตรวจสอบว่าทำให้  $y$  มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดหรือไม่
- ⑦ นำค่า  $x$  ที่ได้จากข้อ 6 ไปแทนค่าเพื่อหาค่า  $y$  ซึ่งเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุดตามต้องการ

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบฝึกทักษะ	รหัสแบบฝึกทักษะที่ 9.4 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9 ชั่วโมงที่ 47 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
---	-------------	---

### แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ข้อที่ 1.5

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบแต่ละข้อต่อไปนี้ลงในตารางให้ถูกต้องสมบูรณ์

ข้อที่	โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุด	คำตอบ
1	รูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีความยาวด้านทั้งสามเป็น 60, 80 และ 100 หน่วย จงหาความกว้างและความยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีพื้นที่มากที่สุดที่บรรจุอยู่ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากนี้	
2	ชายคนหนึ่งมีไม้ระแนงสำหรับทำรั้วได้ยาว 80 เมตร เขาต้องการล้อมรั้วบริเวณรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า พร้อมทั้งกันเป็น 4 ช่วงเท่า ๆ กัน ดังรูป จงหาว่าพื้นที่มากที่สุดที่เขาจะล้อมรั้วได้เท่ากับเท่าใด	



คะแนนที่ได้ .....

ผู้ตรวจ .....

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ.....

ชื่อ .....

นามสกุล .....

ชั้น ..... เลขที่ .....

### เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 9.4

- 1) รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีพื้นที่มากที่สุดจะมี  
ความกว้าง 30 หน่วย  
ความยาว 40 หน่วย
- 2) พื้นที่ที่มากที่สุดที่จะล้อมรั้วได้ เท่ากับ 160 ตารางเมตร

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>แบบสรุปรูปร่าง</b>	รหัสแบบสรุปรูปร่างที่ 9 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9 ชั่วโมงที่ 47 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
---	-----------------------	--

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนสรุปรูปร่างตามเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 9.1 - 9.3  
ตามหัวข้อต่อไปนี้

- 1) ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน คือ .....  
 .....  
 .....
- 2) ขั้นตอนในการหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ มีดังนี้ .....  
 .....  
 .....  
 .....
- 3) ค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันบนช่วง  $[a, b]$  คือ .....  
 .....  
 .....
- 4) ขั้นตอนในการหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ มีดังนี้  
 .....  
 .....  
 .....
- 5) หลักในการแก้ปัญหาโจทย์เกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด มีดังนี้  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>แบบทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์</b>	หน่วยการเรียนรู้ที่ 5 เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน เวลา 1 ชั่วโมง
---	-----------------------------------	---

**คำชี้แจง**                      ให้นักเรียนแสดงวิธีทำทุกข้อ

- 1) ให้  $f(x) = x^2 + 2x - 4$  จงหา
  - 1.1 อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ  $y$  เทียบกับ  $x$  ในช่วง  $x = 2$  ถึง  $x = 6$
  - 1.2 อัตราการเปลี่ยนแปลงของ  $y$  ขณะ  $x = 4$
  
- 2) จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้
  - 2.1  $f(x) = 3x^2 + 6x + 20$
  - 2.2  $f(x) = (x^2 + 1)(x + 2)$
  
- 3) ให้  $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 6x$  จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด  $(4, 6)$
  
- 4) จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน  $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} + 2$
  
- 5) ให้  $f(x) = x^2 + 7x + 10$  เป็นฟังก์ชันบนช่วง  $[2, 5]$  จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์ หรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์
  
- 6) มีลวดยาว 80 เซนติเมตร ต้องการตัดให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ให้มีพื้นที่มากที่สุด จะต้องตัดลวดให้มีด้านกว้างยาวเท่าใด

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ สาระที่ - เรื่อง การอินทิเกรต	<b>หน่วยการเรียนรู้ที่ 3</b>	รายวิชา คณิตศาสตร์ ชั้นที่ 4 (ม. 6) เวลา 13 ชั่วโมง
--	------------------------------	---

### ผลการเรียนรู้

1. หาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
2. หาปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชันบนช่วงที่กำหนดให้และหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งบนช่วงที่กำหนดให้ได้

### สาระการเรียนรู้

1. กระบวนการตรงกันข้ามกับการหาอนุพันธ์
2. อินทิกรัลไม่จำกัดเขต
3. อินทิกรัลจำกัดเขต
4. พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10 สัปดาห์ที่ 16 – 17 ชั่วโมงที่ 48 – 50	เรื่อง กระบวนการตรรกกันข้ามกับการหาอนุพันธ์ การหาอนุพันธ์ จำนวนชั่วโมงสอน 3 ชั่วโมง
---	--	---

### จุดประสงค์การเรียนรู้

1. **ด้านความรู้** นักเรียนสามารถ
  - 1.1 บอกความหมายของกระบวนการตรรกกันข้ามกับการหาอนุพันธ์ได้
  - 1.2 หาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
2. **ด้านทักษะกระบวนการ** นักเรียนมีความสามารถ
  - 2.1 ในการแก้ปัญหา
  - 2.2 ในการให้เหตุผล
  - 2.3 ในการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ
  - 2.4 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์
3. **ด้านคุณลักษณะ** นักเรียน
  - 3.1 มีความรับผิดชอบ
  - 3.2 มีความซื่อสัตย์
  - 3.3 มีความเชื่อมั่นในตนเอง
  - 3.4 มีระเบียบวินัย

### สาระการเรียนรู้

กระบวนการตรรกกันข้ามกับการหาอนุพันธ์



## กิจกรรมการเรียนรู้

ชั่วโมงที่	กิจกรรมการเรียนรู้ / สื่อการเรียนรู้
48 – 50	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. แจกจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบว่า เมื่อเรียนจบแผนการเรียนรู้แล้ว นักเรียนจะสามารถ               <ul style="list-style-type: none"> <li>- บอกความหมายของกระบวนการตรงกันข้ามกับการหาอนุพันธ์ได้</li> <li>- หาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้</li> </ul> </li> <li>2. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยใช้การถาม – ตอบ</li> <li>3. นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 10 แล้วร่วมกันอภิปรายการหากระบวนการตรงกันข้ามกับการหาอนุพันธ์ โดยครูอธิบายเพิ่มเติมจนกว่านักเรียนจะเข้าใจ</li> <li>4. นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 10 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลย และบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบอีกครั้ง</li> <li>5. นักเรียนแต่ละกลุ่มส่งตัวแทนเข้าแข่งขันการหาปฏิยานุพันธ์ จำนวน 10 ข้อ กลุ่มใดทำได้คะแนนสูงสุดจะเป็นผู้ชนะ และได้รับรางวัลจากครูผู้สอน</li> <li>6. นักเรียนทำเอกสารฝึกหัดเพิ่มเติม รหัสที่ 10 เป็นการบ้าน เพื่อเสริมทักษะและความแม่นยำในการเรียนรู้</li> </ol>

### สื่อการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 10
2. แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 10
3. เอกสารฝึกหัดเพิ่มเติม รหัสที่ 10

### แหล่งการเรียนรู้

1. ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
2. ห้องสมุดโรงเรียน
3. ห้องสมุดประชาชน
4. อินเทอร์เน็ต

### หลักฐานการเรียนรู้

1. แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 10
2. เอกสารฝึกหัดเพิ่มเติม

### การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นักเรียนส่วนใหญ่ตอบคำถามได้ถูกต้อง
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	2. นักเรียนสนใจร่วมกิจกรรมดี
3. การทำแบบฝึกทักษะ	3. นักเรียนส่วนใหญ่ทำได้ถูกต้อง
4. การทำเอกสารฝึกหัดเพิ่มเติม	4. นักเรียนส่วนใหญ่ทำได้ถูกต้อง

บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

1. สรุปผลการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. แนวทางในการแก้ไขและพัฒนา

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. ข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ ..... ครูผู้สอน

(นายวิเชียร กิริติศักดิ์กุล)

ครู วิทยฐานะ ครูชำนาญการพิเศษ

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ. ....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัสเอกสารประกอบการสอนที่ 10 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10 ชั่วโมงที่ 48-50 จำนวนชั่วโมงสอน 3 ชั่วโมง
---	--------------------	---

### จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1.1 บอกความหมายของกระบวนการตรงกันข้ามกับการหาอนุพันธ์ได้
- 1.2 หาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

### สาระสำคัญ

กระบวนการตรงกันข้ามกับการหาอนุพันธ์ คือ การหาฟังก์ชัน  $f(x)$  เมื่อกำหนด  $f'(x)$  มาให้ ซึ่งเรียกว่า การหาปฏิยานุพันธ์

### สาระการเรียนรู้

กระบวนการตรงกันข้ามกับการหาอนุพันธ์  
(การหาปฏิยานุพันธ์)

โดยทั่วไปจะนิยามปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน  $f$  ใด ๆ ดังนี้

**บทนิยาม** ฟังก์ชัน  $F$  เป็นปฏิยานุพันธ์ของ  $f$  เมื่อ  $F'(x) = f(x)$   
สำหรับทุกค่าของ  $x$  ที่อยู่ในโดเมนของ  $f$

ตัวอย่างที่ 1 จงแสดงว่า  $F(x) = \sqrt{x^2 - 1}$  เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}}$$

วิธีทำ จาก  $F(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

$$F'(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}(2x)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}}$$

$$\therefore F'(x) = f(x)$$

ดังนั้น  $F(x) = \sqrt{x^2 - 1}$  เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}}$  **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2 จงหาฟังก์ชัน  $F$  เมื่อกำหนด  $F'(x) = 3x^2$

วิธีทำ ให้  $F_1(x) = x^3$

จะได้  $F_1'(x) = 3x^2$  ซึ่งได้สิ่งที่กำหนดให้

นั่นคือ  $F(x) = x^3 + C$  **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้  $f(x) = x - 1$  จงหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน  $f$

วิธีทำ ให้  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$  จะได้  $F'(x) = x - 1$

$$F_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2 \quad \text{จะได้ } F_1'(x) = x - 1$$

$$F_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 7 \quad \text{จะได้ } F_2'(x) = x - 1$$

จะเห็นว่า  $F_1, F_2$  ต่างก็เป็นปฏิยานุพันธ์ของ  $f(x) = x - 1$

$\therefore F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + C$  เมื่อ  $C$  เป็นค่าคงตัว เป็นรูปทั่วไปของปฏิยานุพันธ์ของ

$f(x) = x - 1$  **ตอบ**

สรุป การหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 กำหนด  $f(x)$

ขั้นตอนที่ 2 ลองให้  $y = F(x)$

ขั้นตอนที่ 3 หา  $F'(x)$

ขั้นตอนที่ 4 ทดสอบว่า  $F'(x) = f(x)$  หรือไม่

1. ถ้า  $F'(x) = f(x)$  แล้ว  $y = F(x) + C$  เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน  $f$

2. ถ้า  $F'(x) \neq f(x)$  ให้ดำเนินการตามขั้นตอนที่ 2 ใหม่

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>แบบฝึกทักษะ</b>	รหัสแบบฝึกทักษะที่ 10 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10 ชั่วโมงที่ 48-50 จำนวนชั่วโมงสอน 3 ชั่วโมง
---	--------------------	--

**แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ข้อที่ 1.1 – 1.2**

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ แล้วเติมคำตอบลงในตารางให้ถูกต้องสมบูรณ์

ข้อที่	ฟังก์ชันที่กำหนดให้	ปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้
1	$f(x) = 5x$	
2	$f(x) = x^3$	
3	$f(x) = \frac{1}{x^5}$	
4	$f(x) = x\sqrt{x}$	
5	$f(x) = x^6$	
6	$f(x) = x^{10}$	
7	$f(x) = x^{-4}$	
8	$f(x) = 3x^2 + 7$	

คะแนนที่ได้ .....

ผู้ตรวจ .....

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ.....

ชื่อ .....

นามสกุล .....

ชั้น ..... เลขที่ .....

เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 10

- 1)  $5 + C$
- 2)  $\frac{x^4}{4} + C$
- 3)  $-\frac{1}{4x^4}$
- 4)  $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$
- 5)  $\frac{x^7}{7} + C$
- 6)  $\frac{x^{11}}{11} + C$
- 7)  $-\frac{1}{3x^3} + C$
- 8)  $x^3 + 7x + C$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารฝึกหัดเพิ่มเติม	รหัสเอกสารฝึกหัดเพิ่มเติมที่ 10 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10 ชั่วโมงที่ 48-50 จำนวนชั่วโมงสอน 3 ชั่วโมง
---	-----------------------	--

**คำชี้แจง**                      ให้นักเรียนแสดงวิธีทำทุกข้อ

จงหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1.  $f(x) = 4x^2$
2.  $f(x) = 6x^2$
3.  $f(x) = x\sqrt[3]{x}$
4.  $f(x) = \frac{1}{x^7}$
5.  $f(x) = 4x^2 + 7x$
6.  $f(x) = x^2 + 2$
7.  $f(x) = x^{-3} + 1$
8.  $f(x) = \frac{1}{x^{-4}}$



รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11 สัปดาห์ที่ 17 – 18 ชั่วโมงที่ 51 – 54	เรื่อง อินทิกรัลไม่จำกัดเขต จำนวนชั่วโมงสอน 4 ชั่วโมง
---	--	--

### จุดประสงค์การเรียนรู้

1. ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ
  - 1.1 บอกความหมายของอินทิกรัลไม่จำกัดเขตได้
  - 1.2 บอกสัญลักษณ์ที่ใช้แทนอินทิกรัลไม่จำกัดเขตได้
  - 1.3 บอกสูตรเกี่ยวกับการอินทิเกรต ที่นำมาใช้ในการหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันได้
  - 1.4 หาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันได้
  - 1.5 นำความรู้เรื่องอินทิกรัลไม่จำกัดเขตไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้
2. ด้านทักษะกระบวนการ นักเรียนมีความสามารถ
  - 2.1 ในการแก้ปัญหา
  - 2.2 ในการให้เหตุผล
  - 2.3 ในการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ
  - 2.4 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์
3. ด้านคุณลักษณะ นักเรียน
  - 3.1 มีความรับผิดชอบ
  - 3.2 มีความซื่อสัตย์
  - 3.3 มีความเชื่อมั่นในตนเอง
  - 3.4 มีระเบียบวินัย

### สาระการเรียนรู้

1. อินทิกรัลไม่จำกัดเขต
2. สูตรเกี่ยวกับการอินทิเกรต
3. โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการนำอินทิกรัลไม่จำกัดเขตไปใช้

## กิจกรรมการเรียนรู้

ชั่วโมงที่	กิจกรรมการเรียนรู้ / สื่อการเรียนรู้
51	<p>1. แจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบว่า เมื่อเรียนจบแผนการเรียนรู้แล้ว นักเรียนจะสามารถ</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- บอกความหมายของอินทิกรัลไม่จำกัดเขตได้</li> <li>- บอกสัญลักษณ์ที่ใช้แทนอินทิกรัลไม่จำกัดเขตได้</li> <li>- บอกสูตรเกี่ยวกับการอินทิเกรตที่นำมาใช้ในการหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันได้</li> <li>- หาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันได้</li> <li>- นำความรู้เรื่อง อินทิกรัลไม่จำกัดเขตไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้</li> </ul> <p>2. ครูทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาปฏิยานุพันธ์ โดยใช้การถาม – ตอบ</p> <p>3. นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 11.1 แล้วร่วมกันอภิปรายสรุปความหมายของอินทิกรัลไม่จำกัดเขตและสัญลักษณ์ที่ใช้แทนอินทิกรัลไม่จำกัดเขต โดยครูอธิบายเพิ่มเติมถ้านักเรียนสงสัย หลังจากนั้นบันทึกลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 11</p> <p>4. นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 11.1 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลยและบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง</p>
52	<p>1. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับความหมายของอินทิกรัลไม่จำกัดเขต โดยใช้การถาม – ตอบ</p> <p>2. นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 11.2 แล้วร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับการหาอินทิกรัล จากสูตรการหาอินทิเกรต สูตรที่ 1 – 3 โดยครูอธิบายเพิ่มเติมเมื่อนักเรียนสงสัย</p> <p>3. ครูยกตัวอย่างการหาอินทิกรัล 2 – 3 ตัวอย่างบนกระดาน แล้วให้นักเรียนร่วมกันหา เพื่อทดสอบความเข้าใจของนักเรียน ดังนี้</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. จงหา <math>\int x^6 dx</math></li> <li>2. จงหา <math>\int \frac{1}{x^5} dx</math></li> <li>3. จงหา <math>\int 3x^2 dx</math></li> </ol> <p>4. นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 11.2 เป็นการบ้านเพื่อเสริมทักษะและความแม่นยำในการเรียนรู้</p>
53	<p>1. ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 11.2 แล้วให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจ และบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง</p> <p>2. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขต จากสูตรที่ 1 – 3 โดยใช้การถาม – ตอบ</p> <p>3. นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 11.3 แล้วร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับการหาอินทิกรัล โดยใช้สูตรที่ 4 – 5 โดยมีครูคอยอธิบายเพิ่มเติม หลังจากนั้น</p>

	<p>บันทึกลงในแบบสรุปรูปเนื้อหา รหัสที่ 11</p> <p>4. นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 11.3 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลย และบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง</p> <p>5. นักเรียนแต่ละกลุ่มเตรียมส่งตัวแทนเข้าร่วมแข่งขันการหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขต กลุ่มละ 1 คน ในช่วงต่อไป</p>
54	<p>1. นักเรียนตัวแทนแต่ละกลุ่มเข้าแข่งขันการหาอินทิกรัล จำนวน 10 ข้อ ให้เวลาทำ 15 นาที เมื่อทำเสร็จให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจตามที่ครูเฉลย และบันทึกคะแนนที่ได้ไว้</p> <p>2. ครูตรวจสอบผลการแข่งขันของนักเรียนแต่ละกลุ่ม พร้อมทั้งประกาศผลผู้ชนะ อันดับ 1, 2 และ 3 และมอบรางวัล</p> <p>3. นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 11.4 โดยศึกษาเนื้อหาและตัวอย่างให้ละเอียด ถ้ามีข้อสงสัยให้สอบถามครูผู้สอน</p> <p>4. นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 11.4 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลย และบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง</p> <p>5. นักเรียนแต่ละกลุ่มจัดทำแผนภูมิสูตรเกี่ยวกับการอินทิเกรต เป็นผลงานของกลุ่ม ส่งครูนอกเวลาเรียน</p>

#### สื่อการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 1.1 – 11.4
2. แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 11.1 – 11.4
3. แบบสรุปรูปเนื้อหา รหัสที่ 11

#### แหล่งการเรียนรู้

1. ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
2. ห้องสมุดโรงเรียน
3. ห้องสมุดประชาชน
4. อินเทอร์เน็ต

#### หลักฐานการเรียนรู้

1. แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 11.1 – 11.4
2. แบบสรุปรูปเนื้อหา รหัสที่ 11
3. แผนภูมิ สูตรเกี่ยวกับการอินทิเกรต

#### การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นักเรียนส่วนใหญ่ตอบคำถามได้ถูกต้อง
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	2. นักเรียนสนใจร่วมกิจกรรมดี
3. การทำแบบฝึกทักษะ	3. นักเรียนส่วนใหญ่ทำได้ถูกต้อง
4. การทำแบบสรุปรูปเนื้อหา	4. นักเรียนส่วนใหญ่สรุปเนื้อหาได้ถูกต้อง
5. การทำแผนภูมิ	5. นักเรียนส่วนใหญ่ทำได้ถูกต้อง สวยงาม

## บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

### 1. สรุปผลการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### 2. แนวทางในการแก้ไขและพัฒนา

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### 3. ข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ ..... ครูผู้สอน

(นายวิเชียร กীরติศักดิ์กุล)

ครู วิทยฐานะ ครูชำนาญการพิเศษ

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ. ....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>เอกสารประกอบการสอน</b>	รหัสเอกสารประกอบการสอนที่ 11.1 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11 ชั่วโมงที่ 51 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
---	---------------------------	--

### จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1.1 บอกความหมายของอินทิกรัลไม่จำกัดเขตได้
- 1.2 บอกสัญลักษณ์ที่ใช้แทนอินทิกรัลไม่จำกัดเขตได้

### สาระสำคัญ

รูปทั่วไปของปฏิยานุพันธ์ของ  $f$  คือ ฟังก์ชัน  $y = F(x) + C$  เมื่อ  $C$  เป็นค่าคงตัว เขียนแทนสัญลักษณ์  $\int f(x) dx$  อ่านว่า “อินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน  $f$  เทียบกับตัวแปร  $x$ ”

### สาระการเรียนรู้

#### อินทิกรัลไม่จำกัดเขต

สำหรับฟังก์ชัน  $f$  ที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงใด ๆ จะนิยามอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน ดังนี้

**นิยาม** เมื่อ  $f$  เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง และ  $F'(x) = f(x)$  สำหรับทุก  $x$  ที่อยู่ในโดเมนของ  $f$  อินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน  $f$  เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $\int f(x) dx$  โดยที่  $\int f(x) dx = F(x) + C$  เมื่อ  $C$  เป็นค่าคงตัวใด ๆ

จากบทนิยาม เรียกกระบวนการ  $\int f(x) dx$  ว่า “การอินทิเกรต” หรือการหาปริพันธ์ เครื่องหมาย “ $\int$ ” เรียกว่า เครื่องหมายอินทิกรัล หรือเครื่องหมายปริพันธ์ เรียก  $f(x)$  ว่าตัวถูกอินทิเกรต หรือตัวถูกหาปริพันธ์ และ  $dx$  เป็นสัญลักษณ์ที่บอกว่าการอินทิเกรตนี้เทียบกับตัวแปร  $x$  หรือเป็นตัวอย่างบอกให้รู้ว่า เป็นการหาปริพันธ์เทียบกับตัวแปร  $x$

**ตัวอย่างที่ 1** จงหาปฏิยานุพันธ์ในรูปทั่วไปโดยใช้สัญลักษณ์ของปริพันธ์ไม่จำกัดเขต ในแต่ละข้อต่อไปนี้

$$1. f(x) = x^4$$

$$2. f(x) = x^{10}$$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } 1. \int f(x) dx &= \int x^4 dx \\ &= \frac{x^5}{5} + C \end{aligned}$$

**ตอบ**

$$\begin{aligned} 2. \int f(x) dx &= \int x^{10} dx \\ &= \frac{x^{11}}{11} + C \end{aligned}$$

**ตอบ**

**ตัวอย่างที่ 2** จงหาปฏิยานุพันธ์ในรูปทั่วไป โดยใช้สัญลักษณ์ของปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

$$1) g(x) = x^{\frac{5}{3}}$$

$$2) h(x) = x^{-4}$$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } 1) \int g(x) dx &= \int x^{\frac{5}{3}} dx \\ &= \frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} + C \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{8} x^{\frac{8}{3}} + C$$

**ตอบ**

$$\begin{aligned} 2) \int h(x) dx &= \int x^{-4} dx \\ &= \frac{x^{-3}}{-3} + C \\ &= -\frac{1}{3x^3} + C \end{aligned}$$

**ตอบ**

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบฝึกทักษะ	รหัสแบบฝึกทักษะที่ 11.1 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11 ชั่วโมงที่ 51 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
---	-------------	---

### แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ข้อที่ 1.1 – 1.2

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบลงในช่องว่างแต่ละข้อต่อไปนี้ให้ถูกต้องสมบูรณ์

- การอินทิเกรต หรือการหาปริพันธ์ของ  $f$  เมื่อเทียบกับ  $x$  แทนด้วยสัญลักษณ์ .....
- เครื่องหมาย “ $\int$ ” เรียกว่า .....
- $\int f(x) dx$  อ่านว่า .....
- จงหา  $\int x^8 dx$  .....
- จงหา  $\int x^{-7} dx$  .....
- จงหา  $\int x^6 dx$  .....
- จงหา  $\int x^{\frac{4}{3}} dx$  .....
- จงหา  $\int x^{12} dx$  .....

คะแนนที่ได้ .....

ผู้ตรวจ .....

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ.....

ชื่อ .....

นามสกุล .....

ชั้น ..... เลขที่ .....

### เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 11.1

1.  $\int f(x) dx$
2. เครื่องหมายอินทิกรัลหรือเครื่องหมายปริพันธ์
3. “อินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน  $f$  เทียบกับตัวแปร  $x$ ”  
หรือ “ปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของ  $f$  เมื่อเทียบกับ  $x$ ”
4.  $\frac{x^4}{9} + C$
5.  $\frac{x^{-6}}{-6} + C = -\frac{1}{6x^6} + C$
6.  $\frac{x^7}{7} + C$
7.  $\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} + C$
8.  $\frac{x^{13}}{13} + C$



รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัสเอกสารประกอบการสอนที่ 11.2 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11 ชั่วโมงที่ 52 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
---	--------------------	--

### จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1.3 บอกสูตรเกี่ยวกับการอินทิเกรตที่นำมาใช้ในการหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันได้
- 1.4 หาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันได้

### สาระสำคัญ

การหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ  $f$  สามารถหาได้รวดเร็ว โดยใช้สูตรเกี่ยวกับการอินทิเกรตหรือการหาปริพันธ์

### สาระการเรียนรู้

### สูตรเกี่ยวกับการอินทิเกรต

สูตรเกี่ยวกับการอินทิเกรตที่นำมาใช้ในการหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ  $f$  (ปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของ  $f$ ) ซึ่งในเอกสารชุดนี้มีสูตรดังนี้

**สูตรที่ 1** ถ้า  $f(x) = k$  แล้ว  $\int f(x) dx = \int k dx = kx + C$   
เมื่อ  $k$  และ  $C$  เป็นค่าคงตัว

**ตัวอย่างที่ 1** จงหา  $\int 5 dx$  และ  $\int (-6) dx$

วิธีทำ  $\int 5 dx = 5x + C$   
 $\int (-6) dx = -6x + C$

สูตรที่ 2 ถ้า  $f(x) = x^n$  เมื่อ  $n \neq -1$

$$\int f(x) dx = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา  $\int x^3 dx$  และ  $\int x^6 dx$

วิธีทำ จากสูตรที่ 2  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

จะได้  $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C$

$$= \frac{x^4}{4} + C$$

ตอบ

$$\int x^6 dx = \frac{x^{6+1}}{6+1} + C$$

$$= \frac{x^7}{7} + C$$

ตอบ

สูตรที่ 3  $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$  เมื่อ  $k$  เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างที่ 3 จงหา  $\int 5x^2 dx$

วิธีทำ  $\int 5x^2 dx = 5 \int x^2 dx$

$$= 5 \left( \frac{x^3}{3} \right) + C$$

$$= \frac{5}{3} x^3 + C$$

ตอบ

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>แบบฝึกทักษะ</b>	รหัสแบบฝึกทักษะที่ 11.2 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11 ชั่วโมงที่ 52 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
---	--------------------	---

**แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ข้อที่ 1.3 - 1.4**

**คำชี้แจง**     ให้นักเรียนเติมคำตอบลงในช่องว่างแต่ละข้อต่อไปนี้ให้ถูกต้องสมบูรณ์

1. ค่าของ	$\int 6 \, dx$	=	.....
2. ค่าของ	$\int x^4 \, dx$	=	.....
3. ค่าของ	$\int x^{\frac{5}{4}} \, dx$	=	.....
4. ค่าของ	$\int 10 \, dx$	=	.....
5. ค่าของ	$\int x^{15} \, dx$	=	.....
6. ค่าของ	$\int x^{18} \, dx$	=	.....
7. ค่าของ	$\int 8x^2 \, dx$	=	.....
8. ค่าของ	$\int 9x^3 \, dx$	=	.....
9. ค่าของ	$\int -4x^{\frac{2}{3}} \, dx$	=	.....
10. ค่าของ	$\int -6x^4 \, dx$	=	.....

คะแนนที่ได้ .....

ผู้ตรวจ .....

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ.....

ชื่อ .....

นามสกุล .....

ชั้น ..... เลขที่ .....

เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 11.2

- 1)  $6x + C$
- 2)  $\frac{x^5}{5} + C$
- 3)  $\frac{4}{9}x^{\frac{9}{4}} + C$
- 4)  $10x + C$
- 5)  $\frac{x^{16}}{16} + C$
- 6)  $\frac{x^{19}}{19} + C$
- 7)  $\frac{8}{3}x^3 + C$
- 8)  $\frac{9}{4}x^4 + C$
- 9)  $-\frac{12}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$
- 10)  $-\frac{6}{5}x^5 + C$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัสเอกสารประกอบการสอนที่ 11.3 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11 ชั่วโมงที่ 53 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
---	--------------------	--

### จุดประสงค์การเรียนรู้

1.3 บอกสูตรเกี่ยวกับการอินทิเกรตที่นำมาใช้ในการหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันได้

1.4 หาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันได้

### สาระสำคัญ

การหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ  $f$  สามารถหาได้รวดเร็วโดยใช้สูตรเกี่ยวกับการหาอินทิเกรต หรือการหาปริพันธ์

### สาระการเรียนรู้

#### สูตรเกี่ยวกับการอินทิเกรต (ต่อ)

สูตรเกี่ยวกับการหาอินทิเกรตที่นำมาใช้ในการหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ  $f$  (ปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของ  $f$ ) ซึ่งในเอกสารชุดนี้มีสูตรดังนี้

$$\text{สูตรที่ 4 } \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหา  $\int (x^2 + 2x) dx$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } \int (x^2 + 2x) dx &= \int x^2 dx + \int 2x dx \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + C \\ &= \frac{x^3}{3} + x^2 + C \end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 จงหา  $\int (x^2 + 3x^2 + 5x) dx$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } \int (x^2 + 3x^2 + 5x) dx &= \int x^4 dx + \int 3x^2 dx + \int 5x dx \\ &= \frac{x^5}{5} + \frac{3x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + C \\ &= \frac{x^5}{5} + x^3 + \frac{5}{2}x^2 + C \end{aligned}$$

ตอบ

$$\text{สูตรที่ 5 } \int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหา  $\int \left(2x - \frac{1}{x^2}\right) dx$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } \int \left(2x - \frac{1}{x^2}\right) dx &= \int 2x dx - \int \frac{1}{x^2} dx \\ &= 2 \int x dx - \int x^{-2} dx \\ &= 2 \left(\frac{x^2}{2}\right) - \frac{x^{-1}}{-1} + C \\ &= x^2 + \frac{1}{x} + C \end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 4 จงหา  $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx &= \int \left(x^{-2} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) dx \\ &= \int x^{-2} dx - \int \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{1}{2} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C \\ &= -\frac{1}{x} - \sqrt{x} + C \end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 5 ให้  $f'(x) = x^3 + 4x^2 - 6$  จงหา  $f(x)$  เมื่อกำหนด  $f(1) = 5$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } f'(x) &= x^3 + 4x^2 - 6 \\ \int f'(x) dx &= \int (x^3 + 4x^2 - 6) dx \\ f(x) &= \frac{x^4}{4} + \frac{4}{3}x^3 - 6x + C \dots\dots\dots \text{①} \end{aligned}$$

และจาก  $f(1) = 5$  จะได้  $f(x) = 5$  และ  $x = 1$

แทนค่า  $x$  และ  $f(x)$  ใน ① จะได้

$$5 = \frac{1}{4} + \frac{4}{3} - 6 + C$$

$$60 = 3 + 16 - 72 + 12C$$

$$\therefore C = \frac{113}{12}$$

แทนค่า  $C$  ใน ① จะได้

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{4}{3}x^3 - 6x + \frac{113}{12}$$

ตอบ

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>แบบฝึกทักษะ</b>	รหัสแบบฝึกทักษะที่ 11.3 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11 ชั่วโมงที่ 53 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
---	--------------------	---

**แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ข้อที่ 1.3 – 1.4**

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนเติมคำตอบแต่ละข้อในตารางต่อไปนี้ให้ถูกต้องสมบูรณ์

ข้อที่	คำถาม	คำตอบ
1	จงหา $\int (x^2 + x^5) dx$	
2	จงหา $\int \left(10x - \frac{8}{x^5} - 2\right) dx$	
3	จงหา $\int \frac{2x^4 - x}{x^3} dx$	
4	จงหา $\int \left(3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx$	
5	ให้ $f(x) = 2x - 3$ และ $f(0) = 5$ จงหา $f(x)$	
6	ให้ $f'(x) = \frac{20}{\sqrt{x}}$ และ $f(1) = 40$ จงหา $f(x)$	
7	ให้ $f''(x) = 2x + 1$ และ $f'(x) = 2$ ที่ $x = -1$ และ $y = 2$ จงหา $f(x)$	

คะแนนที่ได้ .....

ผู้ตรวจ .....

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ.....

ชื่อ .....

นามสกุล .....

ชั้น ..... เลขที่ .....

เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 11.3

1)  $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{6} + C$

2)  $2x^5 + 2x^{-4} - 2x + C$

3)  $x^2 + x^{-1} + C$

4)  $2x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} + C$

5)  $f(x) = x^2 - 3x + 5$

6)  $f(x) = 40\sqrt{x}$

7)  $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{23}{6}$



รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัสเอกสารประกอบการสอนที่ 11.4 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11 ชั่วโมงที่ 54 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
---	--------------------	--

## จุดประสงค์การเรียนรู้

1.5 นำความรู้เรื่อง อินทิกรัลไม่จำกัดเขตไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้

## สาระสำคัญ

ในการนำอินทิกรัลไม่จำกัดเขตไปประยุกต์ใช้นั้น ส่วนใหญ่จะนำไปใช้ในการหาฟังก์ชันหรือผลลัพธ์ต่าง ๆ ที่ได้จากฟังก์ชัน เมื่อเรทราบอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

## สาระการเรียนรู้

โจทย์เกี่ยวกับการนำอินทิกรัลไม่จำกัดเขตไปใช้

อินทิกรัลไม่จำกัดเขตสามารถนำมาประยุกต์ใช้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 ถ้ากำหนดความชันของเส้นโค้งที่จุด  $(x, y)$  ใด ๆ เป็น  $3x^2 - 4x - 5$  แล้ว  
จงหาสมการของเส้นโค้งที่ผ่านจุด  $(1, -6)$

วิธีทำ ให้  $y = f(x)$  เป็นสมการของเส้นโค้ง

$\therefore f'(x)$  คือ ความชันของเส้นโค้งที่จุด  $(x, y)$  ใด ๆ

จากโจทย์ จะได้

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 5$$

ใช้วิธีการหาอินทิกรัล จะได้

$$\int f'(x) dx = \int (3x^2 - 4x - 5) dx$$

$$f(x) = \frac{3x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} - 5x + C$$

$$= x^3 - 2x^2 - 5x + C \dots\dots\dots ①$$

แต่เส้นโค้งผ่านจุด  $(1, -6)$  จะได้ว่า  $x = 1$  และ  $f(x) = -6$

แทนค่า  $x$  และ  $f(x)$  ใน ①

$$-6 = 1 - 2 - 5 + C$$

$$C = 0$$

แทนค่า  $C$  ใน ① จะได้สมการเส้นโค้งคือ

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 ในขณะเวลา  $t$  ใด ๆ วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง  $-3t$  เมตร/วินาที<sup>2</sup> ขณะที่เริ่มต้นจับเวลาวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 1 เมตร/วินาที และได้ระยะทาง 3 เมตร จงหา สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุ

วิธีทำ  $\therefore a = \frac{dv}{dt} = -3t$

จะได้  $v = \int -3t \, dt = -\frac{3}{2}t^2 + C_1$

แต่ขณะที่เริ่มต้นจับเวลาวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 1 เมตร/วินาที นั่นคือ ขณะ  $t = 0$ ,  $v = 1$

จาก 
$$v = -\frac{3}{2}t^2 + C_1$$

$$1 = 0 + C_1$$

$$C_1 = 1$$

$\therefore$  ความเร็วขณะเวลา  $t$  คือ  $v = -\frac{3}{2}t^2 + 1$

เนื่องจาก  $v = \frac{dS}{dt} = -\frac{3}{2}t^2 + 1$

จะได้  $S = \int \left(-\frac{3}{2}t^2 + 1\right) dt = -\frac{t^3}{2} + t + C_2$

แต่ขณะที่เริ่มต้นจับเวลาวัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะทาง 3 เมตร นั่นคือ ขณะ  $t = 0$ ,  $S = 3$

จาก 
$$S = -\frac{t^3}{2} + t + C_2$$

$$3 = 0 + 0 + C_2$$

$$C_2 = 3$$

$\therefore$  สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุ คือ  $S = -\frac{t^3}{2} + t + 3$

ตอบ

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>แบบฝึกทักษะ</b>	รหัสแบบฝึกทักษะที่ 11.4 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11 ชั่วโมงที่ 54 จำนวนชั่วโมงสอน 1 ชั่วโมง
---	--------------------	---

### แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ข้อที่ 1.5

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบแต่ละข้อต่อไปนี้ลงในตารางให้ถูกต้อง

ข้อที่	คำถาม	คำตอบ
1	ให้อัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งเท่ากับ $\frac{6}{x^4}$ และเส้นโค้งดังกล่าวสัมผัสกับเส้นตรง $2x - y - 5 = 0$ ที่จุด $(1, -3)$ จงหาสมการของเส้นโค้ง	
2	วัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงด้วยความเร่ง 2 ฟุต/วินาที <sup>2</sup> ถ้าภายใน 2 วินาที วัตถุดังกล่าวเคลื่อนที่ได้ระยะทาง 200 ฟุต และที่เวลาเริ่มต้นความเร็วของวัตถุเท่ากับ 30 ฟุต/วินาที จงหาสมการของความเร็วและระยะทางในรูปของเวลา	
3	จงหาสมการของเส้นโค้งที่ผ่านจุด $P(-1, 3)$ และมีความชันของเส้นสัมผัสที่จุด $(x, y)$ ใด ๆ เท่ากับ $2x$	
4	สมการของเส้นโค้ง $y = f(x)$ มีความชันที่จุด $(x, y)$ ใด ๆ เท่ากับ $3x^2 - 12$ ถ้าค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ $f$ เท่ากับ $-17$ จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ $f$	

คะแนนที่ได้ .....

ผู้ตรวจ .....

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ.....

ชื่อ .....

นามสกุล .....

ชั้น ..... เลขที่ .....

**เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 11.4**

1)  $f(x) = \frac{1}{x^2} + 4x - 8$

2) สมการของความเร็วและระยะทาง คือ

$$v = f'(t) = 2t + 30$$

$$S = f(t) = t^2 + 30t + 136$$

3)  $f(x) = x^2 + 2$

4) 15



รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 12 สัปดาห์ที่ 19 ชั่วโมงที่ 55 – 57	เรื่อง อินทิกรัลจำกัดเขต จำนวนชั่วโมงสอน 3 ชั่วโมง
---	---	---

### จุดประสงค์การเรียนรู้

1. ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ
  - 1.1 บอกสัญลักษณ์อินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชัน  $f$  บนช่วง  $[a, b]$  ได้
  - 1.2 บอกทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัสได้
  - 1.3 หาอินทิกรัลจำกัดเขตโดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลได้
2. ด้านทักษะกระบวนการ นักเรียนมีความสามารถ
  - 2.1 ในการแก้ปัญหา
  - 2.2 ในการให้เหตุผล
  - 2.3 ในการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ
  - 2.4 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์
3. ด้านคุณลักษณะ นักเรียน
  - 3.1 มีความรับผิดชอบ
  - 3.2 มีความซื่อสัตย์
  - 3.3 มีความเชื่อมั่นในตนเอง
  - 3.4 มีระเบียบวินัย

### สาระการเรียนรู้

1. อินทิกรัลจำกัดเขต
2. สัญลักษณ์ของอินทิกรัลจำกัดเขต
3. ทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัส

## กิจกรรมการเรียนรู้

ชั่วโมงที่	กิจกรรมการเรียนรู้ / สื่อการเรียนรู้
55 – 57	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. แจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบว่า เมื่อเรียนจบแผนการเรียนรู้แล้ว นักเรียนจะสามารถ             <ul style="list-style-type: none"> <li>- บอกสัญลักษณ์อินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชัน <math>f</math> บนช่วง <math>[a, b]</math> ได้</li> <li>- บอกทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัสได้</li> <li>- หาอินทิกรัลจำกัดเขตโดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลได้</li> </ul> </li> <li>2. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขต โดยใช้การถาม – ตอบ</li> <li>3. นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 12 แล้วร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับการหาอินทิกรัลจำกัดเขต โดยครูคอยอธิบายเพิ่มเติมเมื่อนักเรียนมีข้อสงสัย หลังจากนั้นให้บันทึกลงในแบบสรุปรเนื้อหา รหัสที่ 12</li> <li>4. ครูแจกโจทย์การหาอินทิกรัลจำกัดเขตให้แต่ละกลุ่ม จำนวน 1 ข้อ ใช้เวลา 5 นาที กลุ่มใดทำเสร็จก่อนและถูกต้อง เป็นผู้ชนะ จะได้รับรางวัลจากครูผู้สอน</li> <li>5. ครูชมเชยนักเรียนที่สนใจร่วมกิจกรรมและตั้งใจเรียน เพื่อเป็นการเสริมแรงในการเรียนรู้ของนักเรียน</li> <li>6. นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 12 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลย และบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง ถ้านักเรียนกลุ่มใดทำไม่เสร็จให้ทำเป็นการบ้าน</li> </ol>

### สื่อการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 12
2. แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 12
3. แบบสรุปรเนื้อหา รหัสที่ 12

### แหล่งการเรียนรู้

1. ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
2. ห้องสมุดโรงเรียน
3. ห้องสมุดประชาชน
4. อินเทอร์เน็ต

### หลักฐานการเรียนรู้

1. แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 12
2. แบบสรุปรเนื้อหา รหัสที่ 12





## การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นักเรียนส่วนใหญ่ตอบคำถามได้ถูกต้อง
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	2. นักเรียนสนใจร่วมกิจกรรมดี
3. การทำแบบฝึกทักษะ	3. นักเรียนส่วนใหญ่ทำได้ถูกต้อง
4. การทำแบบสรุปเนื้อหา	4. นักเรียนส่วนใหญ่สรุปเนื้อหาได้ถูกต้องครบถ้วน

## บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

## 1. สรุปผลการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

## 2. แนวทางในการแก้ไขและพัฒนา

.....

.....

.....

.....

.....

## 3. ข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ ..... ครูผู้สอน

(นายวิเชียร กิรติศักดิ์กุล)

ครู วิทยฐานะ ครูชำนาญการพิเศษ

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ. ....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	เอกสารประกอบการสอน	รหัสเอกสารประกอบการสอนที่ 12 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 12 ชั่วโมงที่ 55-57 จำนวนชั่วโมงสอน 3 ชั่วโมง
---	--------------------	---

### จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1.1 บอกสัญลักษณ์อินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชันบนช่วง  $[a, b]$  ได้
- 1.2 บอกทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัสได้
- 1.3 หาอินทิกรัลจำกัดเขต โดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัสได้

### สาระสำคัญ

ให้  $y = f(x)$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $[a, b]$  อินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชัน  $f$  บนช่วง  $[a, b]$  แทนด้วยสัญลักษณ์  $\int_a^b f(x) dx$  ซึ่งในการคำนวณอินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชัน  $y = f(x)$  บนช่วง  $[a, b]$  นั้น จะใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัส ส่วนในการคำนวณ จะทำให้หาอินทิกรัลจำกัดเขตได้รวดเร็วยิ่งขึ้น และสามารถนำไปใช้ในการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งอีกด้วย

### สาระการเรียนรู้

#### ทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัส

ในการหาอินทิกรัลจำกัดเขตจะใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัสช่วยในการคำนวณ ดังนี้

#### ทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัส

เมื่อ  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $[a, b]$  ถ้า  $F$  เป็นฟังก์ชันบนช่วง  $[a, b]$  โดยที่  $F'(x) = f(x)$  แล้ว  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

จากทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัส เราจะเขียนสัญลักษณ์

$$F(x) \Big|_a^b \text{ แทน } F(b) - F(a)$$

$$\text{ถ้า } F'(x) = f(x) \text{ ดังนั้น } \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหา  $\int_0^1 x^2 dx$

วิธีทำ  $\therefore f(x) = x^2$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องใน  $R$

$\therefore$  ฟังก์ชัน  $f$  จึงเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วง  $[0, 1]$

และเนื่องจากปฏิยานุพันธ์ของ  $f(x) = x^2$  คือ  $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \int_0^1 x^2 dx &= \left( \frac{x^3}{3} + C \right) \Big|_0^1 \\ &= \left( \frac{1}{3} + C \right) - (0 + C) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 จงหา  $\int_{-1}^2 (3x^2 - 2x) dx$

วิธีทำ วิธีที่ 1 ให้  $f(x) = 3x^2 - 2x$

$$\begin{aligned} \therefore \text{จะได้ } \int f(x) dx &= \int_{-1}^2 (3x^2 - 2x) dx \\ &= \frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} \\ &= x^3 - x^2 \end{aligned}$$

นั่นคือ  $F(x) = x^3 - x^2$

จากโจทย์  $a = -1$  และ  $b = 2$

$$\begin{aligned} \text{หา } F(b) &= F(2) \\ &= 2^3 - 2^2 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{หา } F(a) &= F(-1) \\ &= (-1)^3 - (-1)^2 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore F(b) - F(a) &= F(2) - F(-1) \\ &= 4 - (-2) = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{วิธีที่ 2 } \int_{-1}^2 (3x^2 - 2x) dx &= \left( x^3 - x^2 \right) \Big|_{-1}^2 \\ &= F(2) - F(-1) \\ &= (2^3 - 2^2) - ((-1)^3 - (-1)^2) \\ &= 4 - (-2) \\ &= 6 \end{aligned}$$

ตอบ

สรุป

วิธีการหาอินทิกรัลจำกัดเขต (ปริพันธ์จำกัดเขต) ทำได้ดังนี้

- ① หา  $F(x)$  โดยการนำ  $f(x)$  ไปหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขต แต่ไม่ต้องมาบวกค่าคงตัว

$$\int f(x) dx = F(x)$$

$$\text{หรือ } F'(x) = f(x)$$

- ② เมื่อได้  $F(x)$  จากข้อ 1 แล้วให้นำค่า  $a$  และ  $b$  ไปแทนในฟังก์ชัน  $F(x)$  และคำนวณค่า

$$F(b) - F(a)$$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบฝึกทักษะ	รหัสแบบฝึกทักษะที่ 12 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 12 ชั่วโมงที่ 55-57 จำนวนชั่วโมงสอน 3 ชั่วโมง
---	-------------	--

แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ข้อที่ 1.1 – 1.3

คำชี้แจง ให้นักเรียนหาอินทิกรัลจำกัดเขตแต่ละข้อต่อไปนี้ แล้วเติมคำตอบลงในตาราง  
ให้ถูกต้องสมบูรณ์

ข้อที่	คำถาม	คำตอบ
1	จงหา $\int_{-2}^2 (2x - 1) dx$	
2	จงหา $\int_{-1}^2 (x^2 - 4x) dx$	
3	จงหา $\int_{-3}^1 (x^2 + 3x - 4) dx$	
4	จงหา $\int_1^2 (3x^2 - x + 4) dx$	
5	จงหา $\int_1^3 (x^2 - 2x + 3) dx$	
6	จงหา $\int_{-1}^1 (-x^4 + x^2 - 1) dx$	
7	จงหา $\int_1^3 (3x^2 + x - 2) dx$	

คะแนนที่ได้ .....

ผู้ตรวจ .....

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ.....

ชื่อ .....

นามสกุล .....

ชั้น ..... เลขที่ .....

เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 12

- 1) -4
- 2) -3
- 3)  $-\frac{56}{3}$
- 4)  $9\frac{1}{2}$
- 5)  $\frac{20}{3}$
- 6)  $-\frac{4}{3}$
- 7) 26

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม  
รหัสวิชา ค33202  
ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

### แบบสรุปรูปเนื้อหา

รหัสแบบสรุปรูปเนื้อหาที่ 12  
ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 12  
ชั่วโมงที่ 55-57 จำนวนชั่วโมงสอน 3 ชั่วโมง

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนสรุปรูปเนื้อหาตามเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 12  
ตามหัวข้อต่อไปนี้

- สัญลักษณ์  $\int_a^b f(x) dx$  หมายถึง .....  
.....  
.....
- ทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัส กล่าวว่่า .....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....
- ขั้นตอนในการหาอินทิกรัลจำกัดเขต (ปริพันธ์จำกัดเขต) มีดังนี้  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 13 สัปดาห์ที่ 20 ชั่วโมงที่ 58 - 60	เรื่อง พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง จำนวนชั่วโมงสอน 3 ชั่วโมง
---	---	---

### จุดประสงค์การเรียนรู้

1. ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ
  - 1.1 บอกความหมายของพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งได้
  - 1.2 บอกสัญลักษณ์ที่ใช้แทนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งได้
  - 1.3 หาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
2. ด้านทักษะกระบวนการ นักเรียนมีความสามารถ
  - 2.1 ในการแก้ปัญหา
  - 2.2 ในการให้เหตุผล
  - 2.3 ในการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ
  - 2.4 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์
3. ด้านคุณลักษณะ นักเรียน
  - 3.1 มีความรับผิดชอบ
  - 3.2 มีความซื่อสัตย์
  - 3.3 มีความเชื่อมั่นในตนเอง
  - 3.4 มีระเบียบวินัย

### สาระการเรียนรู้

พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง



## กิจกรรมการเรียนรู้

ชั่วโมงที่	กิจกรรมการเรียนรู้ / สื่อการเรียนรู้
58 – 59	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. แจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ ว่า เมื่อเรียนจบแผนการเรียนรู้แล้ว นักเรียนจะสามารถ <ul style="list-style-type: none"> <li>- บอกความหมายของพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งได้</li> <li>- บอกสัญลักษณ์ที่ใช้แทนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งได้</li> <li>- หาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้</li> </ul> </li> <li>2. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาอินทิกรัลจำกัดเขต โดยใช้การถาม – ตอบ</li> <li>3. นักเรียนศึกษาเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 13 แล้วร่วมกันอภิปรายวิธีหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง โดยครูคอยอธิบายเพิ่มเติมเพื่อให้มีความถูกต้องยิ่งขึ้น หลังจากนั้นบันทึกลงในแบบสรุปเนื้อหา รหัสที่ 13</li> <li>4. ครูยกตัวอย่าง 2 – 3 ตัวอย่างบนกระดานแล้วให้นักเรียนช่วยกันหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง เพื่อเป็นการตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนอีกครั้ง</li> <li>5. นักเรียนทำแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 13 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามแผนภูมิเฉลยและบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้งหนึ่ง เพื่อจะได้ทราบข้อบกพร่องของนักเรียน</li> <li>6. นักเรียนแต่ละกลุ่มจัดทำ Mind Map เรื่อง การอินทิเกรตเป็นผลงานของกลุ่มส่งครูนอกเวลาเรียน</li> </ol>
60	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. ครูซักถามปัญหาต่าง ๆ ในการเรียนเรื่อง อินทิเกรตของนักเรียนว่ามีปัญหาข้อสงสัยเรื่องใดบ้าง เพื่อจะได้ทราบข้อบกพร่องของนักเรียนและจะได้หาวิธีแก้ไขปรับปรุงพัฒนาการเรียนการสอนให้ดียิ่งขึ้น</li> <li>2. นักเรียนแต่ละกลุ่มทำเอกสารฝึกหัดทบทวน รหัสที่ 13 ที่ครูแจกให้แล้วร่วมกันสรุปปัญหาที่สงสัยในแต่ละเรื่อง เตรียมนำเสนอหน้าชั้นเรียน</li> <li>3. นักเรียนทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ เรื่อง การอินทิเกรต เพื่อประเมินความก้าวหน้าของนักเรียนหลังจากเรียนจบหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 (แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10 – 13)</li> </ol>

### สื่อการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 13
2. แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 13
3. แบบสรุปรเนื้อหา รหัสที่ 13
4. เอกสารฝึกหัดทบทวน รหัสที่ 13

### แหล่งการเรียนรู้

1. ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
2. ห้องสมุดโรงเรียน
3. ห้องสมุดประชาชน
4. อินเทอร์เน็ต

### หลักฐานการเรียนรู้

1. แบบฝึกทักษะ รหัสที่ 13
2. แบบสรุปรเนื้อหา รหัสที่ 13
3. เอกสารฝึกหัดทบทวน รหัสที่ 13
4. Mind Map เรื่อง การอินทิเกรต

### การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	1. นักเรียนส่วนใหญ่ตอบคำถามได้ถูกต้อง
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	2. นักเรียนสนใจร่วมกิจกรรมดี
3. การทำแบบฝึกทักษะ	3. นักเรียนส่วนใหญ่ทำได้ถูกต้อง
4. การทำแบบสรุปรเนื้อหา	4. นักเรียนส่วนใหญ่สรุปรเนื้อหาได้ถูกต้องครบถ้วน
5. การทำเอกสารฝึกหัดทบทวน	5. นักเรียนส่วนใหญ่ทำได้ถูกต้อง
6. การทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์	6. นักเรียนส่วนใหญ่ทำได้ถูกต้องและผ่านเกณฑ์ขั้นต่ำ
7. การทำ Mind Map	7. นักเรียนส่วนใหญ่ทำได้ถูกต้อง และสวยงาม และมีความรับผิดชอบดี

บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

1. สรุปผลการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. แนวทางในการแก้ไขและพัฒนา

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. ข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ ..... ครูผู้สอน

(นายวิเชียร กীরติศักดิ์กุล)

ครู วิทยฐานะ ครูชำนาญการพิเศษ

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ. ....

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>เอกสารประกอบการสอน</b>	รหัสเอกสารประกอบการสอนที่ 13 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 13 ชั่วโมงที่ 58-59 จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
---	---------------------------	---

### จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1.1 บอกความหมายของพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งได้
- 1.2 บอกสัญลักษณ์ที่ใช้แทนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งได้
- 1.3 หาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

### สาระสำคัญ

พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของ  $y = f(x)$  จาก  $x = a$  ถึง  $x = b$  หมายถึง พื้นที่ของอาณาบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้งของ  $y = f(x)$  แกน  $X$  เส้นตรง  $x = a$  และเส้นตรง  $x = b$

### สาระการเรียนรู้

#### พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

การหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง  $y = f(x)$  จาก  $x = a$  ถึง  $x = b$  สามารถทำได้โดยอาศัยบทนิยามดังนี้

**บทนิยาม** เมื่อ  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $[a, b]$  และ  $A$  เป็นพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของ  $f$  จาก  $x = a$  ถึง  $x = b$

1. ถ้า  $f(x) \geq 0$  สำหรับทุกค่าของ  $x$  ที่อยู่ในช่วง  $[a, b]$  แล้ว  $A$  เป็นพื้นที่เหนือแกน  $X$  และ

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

2. ถ้า  $f(x) \leq 0$  สำหรับทุกค่าของ  $x$  ที่อยู่ในช่วง  $[a, b]$  แล้ว  $A$  เป็นพื้นที่ใต้แกน  $X$  และ

$$A = - \int_a^b f(x) dx$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง  $y = 9 - x^2$  จาก  $x = 0$  ถึง  $x = 3$

วิธีทำ ให้  $A$  แทนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง  $y = 9 - x^2$  จาก  $x = 0$  ถึง  $x = 3$

$f(x) \geq 0$  สำหรับทุก  $x$  ในช่วง  $[0, 3]$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } A &= \int_0^3 (9 - x^2) dx \\ &= \left( 9x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 \\ &= \left[ 9(3) - \frac{3^3}{3} \right] - \left[ 9(0) - \frac{0}{3} \right] \\ &= (27 - 9) - 0 \\ &= 18 \quad \text{ตารางหน่วย} \end{aligned} \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง  $y = x^2 + 2x - 15$  จาก  $x = -2$  ถึง  $x = 2$ .

วิธีทำ ให้  $A$  เป็นพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง  $y = x^2 + 2x - 15$  จาก  $x = -2$  ถึง  $x = 2$

และ  $f(x) \leq 0$  สำหรับทุก  $x$  ในช่วง  $[-2, 2]$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } A &= - \int_a^b f(x) dx \\ &= - \int_{-2}^2 (x^2 + 2x - 15) dx \\ &= - \left( \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 15x \right) \Big|_{-2}^2 \\ &= - \left( \frac{x^3}{3} + x^2 - 15x \right) \Big|_{-2}^2 \\ &= - \left\{ \left[ \frac{2^3}{3} + 2^2 - 15(2) \right] - \left[ \frac{(-2)^3}{3} + (-2)^2 - 15(-2) \right] \right\} \\ &= - \left[ \frac{16}{3} - 60 \right] \\ &= \frac{164}{3} \quad \text{ตารางหน่วย} \end{aligned} \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง  $y = 4x - x^2$  จาก  $x = 1$  ถึง  $x = 3$

วิธีทำ ให้  $A$  แทนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง  $y = 4x - x^2$  จาก  $x = 1$  ถึง  $x = 3$

และ  $f(x) \geq 0$  สำหรับทุก  $x$  ในช่วง  $[1, 3]$

$$\begin{aligned}
 \therefore A &= \int_1^3 (4x - x^2) dx \\
 &= \left. \frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_1^3 \\
 &= \left. 2x^2 - \frac{x^3}{3} \right|_1^3 \\
 &= \left[ 2(3)^2 - \frac{3^3}{3} \right] - \left[ 2(1)^2 - \frac{1^3}{3} \right] \\
 &= (18 - 9) - \left( 2 - \frac{1}{3} \right) \\
 &= 9 - \frac{5}{3} \\
 &= \frac{22}{3} \quad \text{ตารางหน่วย} \quad \quad \quad \text{ตอบ}
 \end{aligned}$$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบฝึกทักษะ	รหัสแบบฝึกทักษะที่ 13 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 13 ชั่วโมงที่ 58-59 จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
---	-------------	--

### แบบฝึกทักษะตามจุดประสงค์การเรียนรู้ข้อที่ 1.1 – 1.3

คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมคำตอบแต่ละข้อต่อไปนี้ลงในตารางให้ถูกต้องสมบูรณ์

ข้อที่	คำถาม	คำตอบ
1	จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ จาก $x = -3$ ถึง $x = 0$	
2	จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x + 1$ จาก $x = -1$ ถึง $x = 1$	
3	จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 6 + x - x^2$ จาก $x = -1$ ถึง $x = 1$	
4	จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 9 - x^2$ จาก $x = -3$ ถึง $x = 3$	
5	จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 - 25$ จาก $x = -1$ ถึง $x = 3$	
6	จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 + x + 1$ จาก $x = 2$ ถึง $x = 3$	
7	จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 3x^2$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 1$	

คะแนนที่ได้ .....

ผู้ตรวจ .....

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ.....

ชื่อ .....

นามสกุล .....

ชั้น ..... เลขที่ .....

เฉลยแบบฝึกทักษะ รหัสที่ 13

- 1) 9 ตารางหน่วย
- 2) 2 ตารางหน่วย
- 3)  $\frac{34}{3}$  ตารางหน่วย
- 4) 36 ตารางหน่วย
- 5)  $\frac{272}{3}$  ตารางหน่วย
- 6)  $\frac{59}{6}$  ตารางหน่วย
- 7) 1 ตารางหน่วย



รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	แบบสรุปเนื้อหา	รหัสแบบสรุปเนื้อหาที่ 13 ใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 13 ชั่วโมงที่ 58-59 จำนวนชั่วโมงสอน 2 ชั่วโมง
---	----------------	---

คำชี้แจง ให้นักเรียนสรุปเนื้อหาตามเอกสารประกอบการสอน รหัสที่ 13  
ตามหัวข้อต่อไปนี้

1. พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง  $y = f(x)$  จาก  $x = a$  ถึง  $x = b$  หมายถึง

.....  
.....  
.....

2. พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของ  $f$  จาก  $x = a$  ถึง  $x = b$  ถ้า  $f(x) \geq 0$  สำหรับทุก  $x$  ที่

อยู่ในช่วง  $[a, b]$  จะหาพื้นที่ได้จาก

$$A =$$

3. พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของ  $f$  จาก  $x = a$  ถึง  $x = b$  ถ้า  $f(x) \leq 0$  สำหรับทุก  $x$  ที่

อยู่ในช่วง  $[a, b]$  จะหาพื้นที่ได้จาก

$$A =$$

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ระดับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	<b>แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์</b>	หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง การอินทิเกรต เวลา 1 ชั่วโมง
---	------------------------------	--

**คำชี้แจง**                      ให้นักเรียนแสดงวิธีทำทุกข้อ

<p>1) จงหา <math>\int (5x^3 - 6x^2 + 2x + 2) dx</math></p> <p>2) กำหนดให้ <math>f'(x) = 2x + 1</math> และ <math>f'(1) = 4</math>, <math>f(0) = 5</math> จงหา <math>f(x)</math></p> <p>3) จงหาสมการเส้นโค้ง <math>y = f(x)</math> เมื่อกำหนดความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด <math>(x, y)</math> ใด ๆ เป็น <math>x^2 - 3x + 2</math> และผ่านจุด <math>(2, 1)</math></p> <p>4) จงหา <math>\int_{-1}^2 (6x^2 + 1) dx</math></p> <p>5) จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง <math>y = x^2 - 2x</math> จาก <math>x = -1</math> ถึง <math>x = 4</math></p>
---

**บรรณานุกรม**

## บรรณานุกรม

ทรงวิทย์ สุวรรณชาติ. ค 015, ค 016 1000 TEST MATHS 3. กรุงเทพฯ : เจ้าพระยา, 2542.

\_\_\_\_\_ . คณิตศาสตร์ ม.6 ค 015 และ ค 016 CONDENSED MATHS 3.

กรุงเทพฯ : จูนพับลิชชิง, 2542.

ยุพิน พิพิธกุล. การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ยุคปฏิรูปการศึกษา. กรุงเทพฯ : บพิธการพิมพ์, 2546.

วิชาการ, กรม. หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544. กรุงเทพฯ : องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์ (ร.ส.พ.), 2545.

สมัย เหล่าวานิชย์ และพัพพรรณ เหล่าวานิชย์. คณิตศาสตร์พื้นฐาน + เพิ่มเติม เล่ม 6 ช่วงชั้นที่ 4 (มัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6). กรุงเทพฯ : ชีรพงษ์การพิมพ์, ม.ป.ป..

\_\_\_\_\_ . คณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 5 ค 015. กรุงเทพฯ : อมรรการพิมพ์, 2536.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 015 ชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา ลาดพร้าว, 2535.

สุชิน ท่ามาหากิน. คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์ ม. 6 เล่ม 5 – 6 ค 015 – ค 016. กรุงเทพฯ : บริษัทจิตวิทย์พัฒนา จำกัด, ม.ป.ป..

สุเทพ จันทร์สมศักดิ์ และสุเทพ ทองอยู่. คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์ 5 ม. 6 เล่ม 5 ค 015. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ภูมิบัณฑิต, 2538.

ภาคผนวก

## ภาคผนวก ก

ตัวอย่างแบบประเมินผลนักเรียนด้านความรู้ความสามารถ  
คุณลักษณะที่พึงประสงค์ และทักษะกระบวนการทำงาน

## แบบประเมินคุณลักษณะที่พึงประสงค์ขณะทำกิจกรรม

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

โรงเรียน ...เมืองราดวิทยาคม...ปีการศึกษา .....

ชื่อกลุ่ม ..... สัปดาห์ที่ .....

คำชี้แจง ให้ใส่ระดับคุณภาพลงในช่องคุณลักษณะที่พึงประสงค์แต่ละคุณลักษณะตามความเป็นจริง

กลุ่ม ที่	ชื่อ - ชื่อสกุล	ระดับคุณภาพของคุณลักษณะ					ผลการ ประเมิน
		ความ รับผิดชอบ	ความมี ระเบียบ วินัย	ความ ซื่อสัต ย์	ความ เชื่อมั่นใน ตนเอง	การกล้า แสดง ความคิดเห็น	

ลงชื่อ ..... ผู้ประเมิน

(...นายวิเชียร กิรติศักดิ์กุล...)

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ.....

**แบบประเมินผลด้านทักษะกระบวนการทำงานของนักเรียน  
ขณะร่วมทำกิจกรรม**

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202.. ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6  
โรงเรียน ...เมืองราดวิทยาคม...ภาคเรียนที่ ...1... ปีการศึกษา .....

ชื่อกลุ่ม ..... สัปดาห์ที่ ..... วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ. ....

คำชี้แจง ให้ใส่ระดับคุณภาพลงในช่องทักษะกระบวนการทำงานแต่ละช่อง  
ตามความเป็นจริง

กลุ่ม ที่	ชื่อ - ชื่อสกุล	ระดับคุณภาพของทักษะกระบวนการทำงาน					ผลการ ประเมิน
		การ วางแผน	ปฏิบัติ ตามแผน	ความ ร่วมมือ	ความคิดริเริ่ม สร้างสรรค์	ความเป็น ระเบียบ	

ลงชื่อ ..... ผู้ประเมิน

(...นายวิเชียร กิรติศักดิ์กุล...)

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ. ....



## แบบประเมินผลด้านความรู้และความสามารถจากผลงานนักเรียน

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202... ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6  
 โรงเรียน ...เมืองราดวิทยาคม... ภาคเรียนที่ ...1... ปีการศึกษา .....

ชื่อผลงาน .....

คำชี้แจง โปรดกาเครื่องหมาย / ลงในช่องให้ตรงกับระดับคุณภาพของผลงาน

กลุ่มที่	ชื่อกลุ่ม	ระดับคุณภาพ				
		4	3	2	1	0

ลงชื่อ ..... ผู้ประเมิน  
 (.....)

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ.....

## ภาคผนวก ข

ตัวอย่างแบบบันทึกข้อมูลนักเรียน

**แบบบันทึกข้อมูลนักเรียน**  
**ปีการศึกษา .....**

- ชื่อ – สกุล ..... ชื่อเล่น ..... ชั้น ..... เลขที่ .....
- เกิดวันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ..... เชื้อชาติ ..... สัญชาติ ..... ศาสนา .....
- ที่อยู่ปัจจุบันบ้านเลขที่..... หมู่ที่ ..... ถนน..... ตำบล.....  
อำเภอ ..... จังหวัด .....
- ปัจจุบันอาศัยอยู่กับ  บิดาและมารดา       บิดา       มารดา  
 อื่น ๆ (โปรดระบุ) .....
- อาชีพของบิดา ..... วุฒิการศึกษา (สูงสุด) ..... รายได้/เดือน..... บาท
- อาชีพของมารดา ..... วุฒิการศึกษา (สูงสุด) ..... รายได้/เดือน..... บาท
- อาชีพของผู้ปกครอง (กรณีไม่ใช่บิดามารดา) .....  
วุฒิการศึกษา (สูงสุด) ..... รายได้/เดือน ..... บาท
- จำนวนพี่-น้อง ..... คน นักเรียนเป็นคนที่ .....
- วิชาที่ชอบและถนัด 1..... 2..... 3.....
- วิชาที่ไม่ชอบและไม่ถนัด 1.....2.....3.....
- เกรดเฉลี่ย (ม.4) .....
- เกรดเฉลี่ย (ม.5) .....

**ผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์**

ที่	รายวิชา	รหัสวิชา	ระดับผลการเรียน	หมายเหตุ

● เพื่อนที่สนิท

ลำดับที่	ชื่อ - ชื่อสกุล	ระดับชั้น	โรงเรียน	หมายเลขโทรศัพท์

● สาขาวิชาที่สนใจศึกษาต่อและสถาบัน

ลำดับที่	สาขาวิชาที่สนใจ	สถาบัน

ลงชื่อ .....

(.....)

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ.....